Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

74. BAND, 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 19. SEPTEMBER 1960)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1960

n. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* ur *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 19 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 19 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe d eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auc Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit s mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch i Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht a anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichur durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rech der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag übe Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe d zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutsch Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervie fältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag verei bart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *D Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. D Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in g lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrif für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildung sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommende griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr vo Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole *o* und sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. D Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugebe

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herre Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen solle dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,

R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Math. Inst. d. Universität, Portania.

F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,

H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

Springer-Verlag OHG — Berlin-Wilmersdorf, Heidelberger Platz 3 — Heidelberg, Neuenheim Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

74. Band **Inhalt** 3. He

Se

Walter, W., Eindeutigkeitssätze für gewöhnliche, parabolische und hyperbolische Differentialgleichungen 1
Nickel, K., Ein Eindeutigkeitssatz für instationäre Grenzschichten 2
Meyer-König, W., und K. Zeller, Ein high-indices-Theorem für Dirichletsche Reihen 2
Hofmann, K. H., Topologische Halbgruppen mit dichter submonogener Unterhalbgruppe 2
Wittich, H., Eindeutige Lösungen der Differentialgleichung $w' = R(z, w)$ 2
Nitsche, J. C. C., Ein Eindeutigkeitssatz für zweifach zusammenhängende Minimalflächen 2
Kneser, H., Majoranten bei einem Existenzsatz über partielle Differentialgleichungen 2
Wielandt, H., Über den Transitivitätsgrad von Permutationsgruppen 2

WALTER, W.
Math. Zeitschr. 74, 191–208 (1960)

Eindeutigkeitssätze für gewöhnliche, parabolische und hyperbolische Differentialgleichungen

Herrn ERICH KAMKE zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von
Wolfgang Walter

1. Einleitung

Diese Arbeit behandelt unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt Eindeutigkeitsfragen für die drei folgenden Probleme A, B und C:

(A) *das Anfangswertproblem*

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = \eta \qquad (0 \leqq x \leqq a) \tag{1}$$

für eine gewöhnliche Differentialgleichung;

(B) *die erste Anfangsrandwertaufgabe für die parabolische Differentialgleichung*

$$u_x = f(x, y, u, u_y, u_{yy}); \tag{2}$$

(C) *das charakteristische Anfangswertproblem der hyperbolischen Differentialgleichung*

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y). \tag{3}$$

Außerdem werden Systeme von Differentialgleichungen der genannten Typen sowie einige verwandte Probleme betrachtet.

Bei der gewöhnlichen Differentialgleichung (1) sind Eindeutigkeitsbedingungen von der Form

$$|f(x, y - f(x, \bar{y})| \leqq g\big(x, |y - \bar{y}|\big) \tag{4}$$

(zum Teil auch ohne Absolutstriche; s. Nr. 2) von vielen Autoren angegeben worden. Einige der wichtigsten seien in Kürze genannt. Am bekanntesten ist die Lipschitz-Bedingung

$$(\alpha) \qquad g(x, z) = l(x)\, z \quad \text{mit} \quad l(x) \geqq 0, \quad \int_0^a l(x)\, dx < \infty \qquad (a > 0).$$

OSGOOD [2] zeigte 1898, daß die Funktion $g(x, z) = \omega(z)$ zu einer Eindeutigkeitsbedingung gemäß (4) führt, wenn $\omega(z)$ stetig für $z \geqq 0$ und

$$(\beta) \qquad \omega(0) = 0, \quad \omega(z) > 0 \quad \text{für} \quad z > 0, \quad \int_0^1 [\omega(z)]^{-1}\, dz = \infty$$

ist [1]; dieses Ergebnis wurde von MONTEL [4] verschärft zu

$$(\gamma) \qquad g(x,z) = l(x)\,\omega(z)$$

[Voraussetzungen über l wie bei (α)]. Etwa gleichzeitig wurde die Eindeutigkeitsbedingung (γ) auch von TONELLI [5] angegeben und von MÜLLER [8] auf Systeme von Differentialgleichungen ausgedehnt. Von ROSENBLATT [3] stammt die Bedingung

$$(\delta) \qquad g(x,z) = \beta\frac{z}{x} \quad \text{mit} \quad 0<\beta<1,$$

während der Fall $\beta=1$, d.h.

$$(\varepsilon) \qquad g(x,z) = \frac{z}{x}$$

erst viel später von NAGUMO [5] entdeckt wurde.

Alle diese Ansätze umfaßt der Eindeutigkeitssatz von KAMKE [9] [2]. Die Grundidee ist dabei, die Funktion $g(x,z)$ nicht explizit anzugeben, sondern durch gewisse Eigenschaften der Differentialgleichung

$$(5) \qquad z' = g(x,z)$$

zu beschreiben. Übrigens enthält der Satz von KAMKE neben (α) bis (ε) noch weitere interessante Spezialfälle, von denen wir den folgenden

$$(\eta) \qquad g(x,z) = \frac{z}{x} + x\,l(x)\,\omega\left(\frac{z}{x}\right)$$

notieren [Voraussetzungen über l und ω wie bei (α) und (β)].

In jüngster Zeit wurden verschiedentlich Eindeutigkeitsfragen bei den Aufgaben B und C untersucht. Hierbei erwiesen sich die bekannten Eindeutigkeitssätze für gewöhnliche Differentialgleichungen und die ihnen zugrunde liegenden Beweisideen als sehr wertvoll. Es zeigte sich nämlich, daß diese Sätze eine Übertragung auf die Gln. (2) und (3) zuließen. So wurde ein Eindeutigkeitssatz bei erfüllter Lipschitz-Bedingung für das Problem B 1947 von WESTPHAL [12] bewiesen; für das Problem C ist er klassisch (PICARD [1]). Ein auf die hyperbolischen Probleme bezüglicher Satz vom Osgood-Typ findet sich bei KISYNSKI [16], ein solcher vom Montel-Typ bei WALTER [19]. Das Kriterium (ε) von NAGUMO wurde von NICKEL [18] auf parabolische und von WALTER [19] und davon unabhängig von SHANAHAN [20] auf hyperbolische Gleichungen übertragen (vgl. auch DIAZ und WALTER [21]). Allgemeinere Sätze für das Problem B wurden von GIULIANO [13], SZARSKI [15] und NICKEL [18] angegeben. Dem Versuch, den Satz von KAMKE auf das Problem C

[1] Wesentlich ist nur das Verhalten von $\omega(z)$ für kleine positive z. Man kann deshalb bei der Formulierung der Bedingung auch nur verlangen, daß ω in einem Intervall $0 \leqq z \leqq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, erklärt ist. Dabei wird jedoch keine größere Allgemeinheit erzielt, da sich $\omega(z)$ für $z \geqq \varepsilon$ als stetige, positive Funktion fortsetzen läßt.

[2] Der Satz von KAMKE gilt auch für Systeme von Differentialgleichungen; er wurde in [10] noch weiter verallgemeinert. Für den Fall *einer* gewöhnlichen Differentialgleichung wurde ein ähnlicher Satz, bei dem (4) ersetzt ist durch die Voraussetzung, daß für $y \geqq \bar{y}$ die Ungleichung $f(x,y) - f(x,\bar{y}) \leqq g(x, y-\bar{y})$ besteht, wobei die Funktion $g(x,z)$ denselben Einschränkungen wie beim Satz von KAMKE unterliegt, von IYANAGA [7] bewiesen.

auszudehnen, stellen sich jedoch große Schwierigkeiten entgegen. Einer der Gründe dafür ist in der Tatsache zu erblicken, daß der Existenzsatz von PEANO, welcher beim Beweis — vgl. KAMKE [9, S. 139f.] — benötigt wird, kein Analogon für die Gl. (3) besitzt. Von GUGLIELMINO [17] [für den Fall $f=f(x, y, u)$], SHANAHAN [20] und WALTER [22] wurden allgemeine Eindeutigkeitsbedingungen für das Problem C aufgestellt. Doch ist keiner dieser Sätze so umfassend, wie es beim Problem A der Satz von KAMKE ist (so ist z.B. der oben erwähnte „Satz nach NAGUMO" für das Problem C nicht in ihnen enthalten).

Im folgenden sollen diese Fragen mittels einer einheitlichen Methode behandelt werden. Die Ausführungen der Nr. 2 dienen vor allem dazu, den eingeschlagenen Weg am einfachen Beispiel einer gewöhnlichen Differentialgleichung aufzuzeigen. Dabei ergeben sich einige Verschärfungen bekannter Sätze. Die Grundlage für die Anwendung unserer Methode auf parabolische Differentialgleichungen bildet ein Abschätzungssatz (Satz 4). Er ist auch sonst von Interesse, weil er für eine weite Klasse von parabolischen Differentialgleichungen, zu der auch die Wärmeleitungsgleichung gehört, das bekannte Lemma von NAGUMO [11], [12] verschärft. In Nr. 4 wird ein Satz bewiesen (Satz 7), der alle bisher bekannten Eindeutigkeitskriterien für das Problem C sowie einige neue, schärfere Kriterien als Spezialfälle enthält.

Herrn Prof. M. MÜLLER bin ich für einige kritische Bemerkungen und Hinweise zu Dank verpflichtet.

2. Ein Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen

Unter einer Lösung des Problems A verstehen wir eine Funktion $y(x)$, die in einem Intervall I: $0 \leqq x \leqq a$ $(a>0)$ differenzierbar ist, dort der Gl. (1) genügt und einen vorgeschriebenen Anfangswert $y(0)=\eta$ annimmt. Dabei ist angenommen, daß die Funktion $f(x, y)$ auf der Punktmenge

$$D\colon\ 0 \leqq x \leqq a, \quad |y| < \infty$$

erklärt ist.

Die Punkte aus I bzw. D mit positivem x bilden die Punktmengen I_0 bzw. D_0,

$$I_0\colon\ 0 < x \leqq a; \quad D_0\colon\ 0 < x \leqq a, \quad |y| < \infty.$$

Die rechts- bzw. linksseitige Ableitung einer Funktion $y(x)$ wird wie üblich mit y'_+ bzw. y'_-, die vier Derivierten werden mit $\overline{D}_+$, $\overline{D}_-$, $\underline{D}_+$, $\underline{D}_-$ bezeichnet. $C^0(M)$ ist die Klasse der auf einer Punktmenge M stetigen Funktionen.

Der folgende wohlbekannte Abschätzungssatz ist grundlegend für unsere Methode.

SATZ 1. *Es sei $F(x, z)$ in D_0 erklärt und monoton wachsend*[3]) *in z. Für zwei in I stetige, in I_0 differenzierbare Funktionen $y(x), z(x)$ mit $y(0) < z(0)$ sei*

$$y' \leqq F(x, y) \quad \text{und} \quad z' \geqq F(x, z) \quad \text{in } I_0. \tag{6}$$

Dann ist $y(x) < z(x)$ in I.

[3]) Hier und im folgenden wird unter Monotonie immer die Monotonie im weiteren Sinne verstanden; im obigen Fall bedeutet dies also, daß $F(x, z) \leqq F(x, \bar{z})$ für $z \leqq \bar{z}$ ist.

Die Behauptung bleibt richtig, wenn vorausgesetzt wird, daß $y(x)$ und $z(x)$ in I totalstetig sind, daß $y(0)<z(0)$ ist und daß die Ungleichungen (6) *fast überall in I_0 gelten.*

Gäbe es nämlich eine erste Stelle ξ, an der die Differenz $d(x)=z(x)-y(x)$ verschwindet, so wäre $y<z$ für $0\leqq x<\xi$, also wegen der Monotonie von F

$$d'=z'-y'\geqq F(x,z)-F(x,y)\geqq 0$$

und damit $d(x)$ monoton wachsend für $0\leqq x\leqq\xi$. Dies ist jedoch unvereinbar mit den beiden Aussagen $d(0)>0$, $d(\xi)=0$.

Der Beweis zeigt übrigens, daß die Behauptung verschärft werden kann: die Differenz $z-y$ ist eine monoton wachsende Funktion von x.

Es sei G die Klasse aller Funktionen $g(x,z)$, welche die folgenden Eigenschaften besitzen:

(G) *$g(x,z)$ ist in D_0 erklärt und in der Variablen z monoton wachsend; zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es eine in I_0 differenzierbare (oder in I totalstetige) Funktion $z(x)$, für welche*

(7) $$z'\geqq g(x,z) \text{ in } I_0$$

sowie

(8) $$0<z(x)\leqq\varepsilon \text{ in } I_0, \quad z(x)\neq o(x) \quad \text{für} \quad x\to 0$$ [4])

gilt (bei totalstetigem $z(x)$ genügt es, wenn (7) *fast überall gilt).*

SATZ 2 (EINDEUTIGKEITSSATZ). *Das Problem A hat höchstens eine Lösung, wenn die Funktion $f(x,y)$ einer Abschätzung*

(9) $$f(x,\bar{y})-f(x,y)\leqq g(x,\bar{y}-y) \quad \text{für} \quad 0<x\leqq a, \quad y<\bar{y}$$

mit $g(x,z)\in G$ genügt.

BEWEIS. Sind $y(x)$ und $\bar{y}(x)$ zwei Lösungen von (1), so gilt dasselbe von den beiden Funktionen

$$\operatorname{Max}[y(x),\bar{y}(x)] \quad \text{und} \quad \operatorname{Min}[y(x),\bar{y}(x)].$$

Beim Nachweis, daß $y(x)=\bar{y}(x)$ ist, kann also $y(x)\leqq\bar{y}(x)$ angenommen werden. Die Differenz $d(x)=\bar{y}(x)-y(x)$ hat dann, da y und $\bar{y}$ im Punkt $x=0$ mit Einschluß ihrer Ableitung übereinstimmen, die Eigenschaften

(10) $$d'=f(x,\bar{y})-f(x,y)\leqq g(x,d),$$

$d(x)\geqq 0$ und $d(x)=o(x)$ für $x\to 0$. Ist $z(x)$ eine Funktion mit den in G genannten Eigenschaften, so gibt es wegen $z(x)\neq o(x)$ beliebig kleine positive Zahlen α mit $d(\alpha)<z(\alpha)$. Nach Satz 1, angewandt auf $d(x)$ und $z(x)$ und das Intervall $\alpha\leqq x\leqq a$, ist $d(x)<z(x)$ für $\alpha\leqq x\leqq a$. Also ist $0\leqq d\leqq z$ in I_0 für jede solche Funktion z, d.h. $d=0$.

---

[4]) Wegen $z(x)>0$ ist „$z(x)\neq o(x)$ für $x\to 0$" gleichbedeutend damit, daß entweder $\limsup_{x\to 0} z(x)>0$ oder $\lim_{x\to 0} z(x)=0$ und [mit $z(0)=0$] $\overline{D}_+ z(0)>0$ ist.

Die Gültigkeit dieses Satzes hängt wesentlich von der oben gegebenen Definition einer Lösung ab, nach der die Differentialgleichung (1) auch noch im Punkt $x=0$ erfüllt sein muß. Dies oder vielmehr die sich hieraus ergebende Tatsache, daß die Differenz zweier Lösungen $o(x)$ ist, wird beim Beweis an entscheidender Stelle benutzt. Betrachtet man dagegen Lösungen in einem verallgemeinerten Sinne, etwa im Sinne von CARATHÉODORY — das bedeutet, daß $y(x)$ totalstetig und

$$y(x)=\eta+\int_0^x f\big(t, y(t)\big)\,dt \tag{11}$$

ist — so ist die Differenz zweier Lösungen im allgemeinen nicht mehr $o(x)$, sondern nur noch $o(1)$ $(x\to 0)$. Der Eindeutigkeitsbeweis läßt sich dann wie oben durchführen, wenn in (8) statt $z(x)\neq o(x)$ sogar $z(x)\neq o(1)$ gefordert wird[5]). Bezeichnen wir die so eingeschränkte Funktionenklasse G mit $G\big(o(1)\big)$, so besteht also der folgende

SATZ 3. *Das Anfangswertproblem* (11) *im Sinne von* CARATHÉODORY *besitzt höchstens eine Lösung, wenn für fast alle x die Ungleichung* (9) *gilt und dabei* $g(x,z)\in G\big(o(1)\big)$ *ist.*

In vielen Fällen kann man jedoch mehr aussagen. Ist z.B. bekannt, daß die Funktion $f(x,y)$ in einer Umgebung des Punktes $(0,\eta)$ beschränkt ist, so folgt für die Differenz zweier Lösungen $d(x)=O(x)$. Es genügt dann vorauszusetzen, daß $g(x,z)$ aus der Klasse $G\big(O(x)\big)$ ist [mit dieser Bezeichnung soll also angedeutet werden, daß in (8) die Ungleichung $z(x)\neq o(x)$ durch $z(x)\neq O(x)$ ersetzt werden muß]. Die Beispiele (α), (β) und (γ) von Nr. 1 sind aus $G\big(o(1)\big)$ und demnach auch für Anfangswertprobleme im Sinne von CARATHEODORY als Eindeutigkeitskriterien zulässig, während (δ) der Klasse $G\big(O(x)\big)$ und das Beispiel (ε) und seine Verallgemeinerungen der Klasse $G=G\big(o(x)\big)$ angehören [hierbei wurde angenommen, daß die Funktion $\omega(z)$ monoton wachsend ist].

Es ist nicht schwer, die Sätze 2 und 3 auf Systeme von Differentialgleichungen zu übertragen. Hierzu einige Bezeichnungen. Der Raum R_n $(n\geqq 1)$ der Vektoren $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,\ldots,v_n)$, ... sei in beliebiger Weise normiert, d.h. es sei eine Norm $\|u\|$ mit den üblichen Eigenschaften

$$\|u\|>0 \quad \text{für} \quad u\neq 0, \qquad \|u+v\|\leqq\|u\|+\|v\|, \qquad \|\alpha u\|=|\alpha|\,\|u\|$$

(α reelle Zahl) definiert.

Für das Folgende benötigen wir den Satz 1 in einer etwas abgeänderten Form.

SATZ 1'. *Die Vektorfunktion* $u(x)=\big(u_1(x),\ldots,u_n(x)\big)$ *und die (skalare) Funktion* $z(x)$ *seien in I stetig und in* I_0 *differenzierbar, es sei* $\|u(0)\|<z(0)$ *und*

$$\|u'\|\leqq F\big(x,\|u\|\big), \qquad z'\geqq F(x,z) \text{ in } I_0. \tag{6'}$$

Dabei sei die (nach wie vor von zwei reellen Veränderlichen abhängende) Funktion $F(x,z)$ *monoton wachsend in z. Dann ist* $\|u(x)\|<z(x)$ *in I.*

[5]) Das bedeutet, daß $\limsup z(x)>0$ ist $(x\to+0)$.

Zum Beweis betrachten wir die Funktion $y(x)=\|u(x)\|$. Nach der Dreiecksungleichung ist

$$|y(x+h)-y(x)| = |\|u(x+h)\|-\|u(x)\|| \leqq \|u(x+h)-u(x)\|,$$

also, wenn D^* irgend eine der vier Derivierten bezeichnet,

$$D^* y(x) \leqq \|u'(x)\|. \tag{12}$$

Sind $d(x)$ und ξ wie im Beweis von Satz 1 definiert, so ist wegen (12)

$$D^* d \geqq z' - \|u'\| \geqq F(x,z) - F(x,y) \geqq 0,$$

woraus sich die Monotonie von d und alles weitere wie früher ergibt.

Es seien nun f, η und y Vektoren aus dem Raum R_n und dementsprechend das Problem A ein Anfangswertproblem für ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen. *Der Eindeutigkeitssatz 2 ist auch für ein solches System richtig, wenn statt* (9)

$$\|f(x,\bar{y}) - f(x,y)\| \leqq g\big(x, \|\bar{y}-y\|\big) \text{ für } 0<x\leqq a \text{ und beliebige } y,\bar{y} \tag{9'}$$

gefordert wird. Ebenso gilt Satz 3 für Systeme von Differentialgleichungen im Sinne von CARATHÉODORY, natürlich mit (9') an Stelle von (9).

Die Beweise ändern sich nur geringfügig. Für die Differenz zweier Lösungen $d(x)=\bar{y}(x)-y(x)$ hat man jetzt statt (10) die Abschätzung

$$\|d'\| = \|f(x,\bar{y}) - f(x,y)\| \leqq g\big(x, \|d\|\big). \tag{10'}$$

Zur Begründung von $\|d(x)\|=o(x)$ (Satz 2) bzw. $\|d(x)\|=o(1)$ (Satz 3) benötigt man die Tatsache, daß zu jeder Norm eine Konstante K mit der Eigenschaft

$$\|u\| = \|(u_1,\ldots,u_n)\| \leqq K\big(|u_1|+\cdots+|u_n|\big)$$

existiert. Die Ungleichung $\|d(x)\|\leqq z(x)$ ergibt sich dann leicht aus Satz 1'. Im Falle von Satz 3 ist dabei zu beachten, daß der Satz 1' auch dann gültig ist, wenn die Vektorfunktion u und die skalare Funktion z totalstetig sind und die Ungleichungen (6') fast überall in I gelten.

In der Literatur über Systeme von Differentialgleichungen findet man in Verbindung mit Abschätzungs- und Eindeutigkeitssätzen meistens die spezielle Norm $\|u\|=|u_1|+\cdots+|u_n|$, zuweilen auch den Euklidischen Abstand $\|u\|=(u_1^2+\cdots+u_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Die obigen Bemerkungen sollten deutlich machen, daß eine Beschränkung auf eine bestimmte Norm gar nicht notwendig ist und daß die Beweise durch die Zulassung einer beliebigen Norm nicht komplizierter werden. Ja, es ist sogar möglich, statt einer Norm einen noch allgemeineren Abstandsbegriff zugrundezulegen. Das wurde bei Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen erstmals von KAMKE [*10*] gezeigt. Es liegt nicht in unserer Absicht, hier dasselbe für parabolische und hyperbolische Systeme durchzuführen.

Es besteht natürlich eine enge Beziehung zwischen dem Eindeutigkeitssatz von KAMKE und unserem Satz 2. Beim ersteren werden Stetigkeitsforderungen

gestellt, die hier entbehrlich sind[6]); dafür wird beim letzteren die Allgemeinheit durch eine Monotoniebedingung beeinträchtigt[7]). Satz 3 schneidet günstiger ab; der bekannte entsprechende Satz (CODDINGTON-LEVINSON [*14*, S. 51]) ist in ihm enthalten. Ein für die Übertragung auf partielle Differentialgleichungen entscheidender Unterschied besteht jedoch im Beweis: man kommt bei Satz 2 und 3 ohne den Existenzsatz von PEANO bzw. CARATHÉODORY aus. Von diesem Gesichtspunkt aus kann man unsere Methode auch dadurch charakterisieren, daß statt eines allgemeinen Existenzsatzes nur die wesentlich schwächere Existenzaussage benutzt (und vorausgesetzt!) wird „es gebe beliebig kleine positive $z(x) \neq o(x)$ mit $z' \geqq g(x, z)$". Die Zweckmäßigkeit eines solchen Vorgehens wird sich vor allem beim Problem C erweisen, wo ein allgemeiner Existenzsatz nicht bekannt ist.

3. Parabolische Differentialgleichungen

Wir betrachten hier parabolische Differentialgleichungen in der Gestalt

$$u_x = f(x, y, u, u_y, u_{yy}). \tag{13}$$

Hierin bedeutet x wie früher eine reelle Veränderliche, die in einem Intervall I: $0 \leqq x \leqq a$ variiert; y ist ein Vektor $y = (y_1, \ldots, y_m) \in R_m$ $(m \geqq 1)$, der in einem beschränkten Gebiet $G \subset R_m$ bzw. in der abgeschlossenen Hülle $\overline{G}$ von G liegen möge. Mit Z und Z_0 bezeichnen wir die Hyperzylinder

$$Z = I \times \overline{G}, \qquad Z_0 = I_0 \times G$$

(I_0 ist das Intervall $0 < x \leqq a$) im Raume R_{m+1}, mit $R_p = Z - Z_0$ seinen „Rand". Dabei soll der Index p („parabolisch") daran erinnern, daß die „Deckfläche" $\{x = a\} \times G$ nicht zum „Rand" R_p, sondern zum „Innern" Z_0 gezählt wird. Diese Einteilung ist charakteristisch für Randwertaufgaben bei parabolischen Differentialgleichungen.

Die Funktion $f(x, y, z, p, r) = f(x, y, z, p_i, r_{ij})$ sei für $(x, y) \in Z_0$, beliebige reelle z sowie beliebige reelle Vektoren $p = (p_1, \ldots, p_m)$ und symmetrische Matrizen $r = (r_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ erklärt und monoton wachsend in r,

$$f(x, y, z, p, r) \leqq f(x, y, z, p, \bar{r}) \quad \text{für} \quad r \leqq \bar{r}. \tag{14}$$

Dabei bedeutet $r \leqq \bar{r}$ im Falle $m > 1$, daß die symmetrische Matrix $\bar{r} - r$ positiv semidefinit ist, d.h. also, daß

$$\sum_{i,j=1}^{m} (\bar{r}_{ij} - r_{ij}) \alpha_i \alpha_j \geqq 0 \text{ für beliebige } \alpha_i$$

ist. Die Bezeichnung $f \in P$ soll diese Voraussetzungen zusammenfassen.

[6]) Außerdem wird nicht verlangt, daß $g(x, z) \geqq 0$ ist. Da in (9) nur eine einseitige Abschätzung verlangt wird, sind auch Funktionen g von wechselndem Vorzeichen zugelassen [jedoch nicht bei Systemen, s. (9′)].

[7]) Man sieht leicht, daß jede beim Eindeutigkeitssatz von KAMKE zulässige Funktion $g(x, z)$, welche darüber hinaus monoton wachsend in z ist, der Klasse G angehört. Umgekehrt genügt jede in D_0 stetige, für $z = 0$ verschwindende und für positive z nichtnegative Funktion $g(x, z) \in G$ den Bedingungen, die beim Eindeutigkeitssatz von KAMKE verlangt werden.

Die Funktion $u(x, y) = u(x, y_1, \ldots, y_m)$ ist aus der Klasse $C^* = C^*(Z)$, wenn sie in Z stetig ist, wenn die partielle Ableitung u_x in Z_0 existiert und wenn die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach den y_i, die wir zu einem Vektor $u_y = (u_{y_1}, \ldots, u_{y_m})$ und einer Matrix $u_{yy} = (u_{y_i y_j})$ zusammenfassen, in Z_0 existieren und stetig sind. Das Problem B besteht darin, eine Funktion $u(x, y) \in C^*(Z)$ zu finden, welche in Z_0 der Gl. (13) genügt und auf dem Rand R_p vorgeschriebene Randwerte annimmt, wobei immer $f \in P$ vorausgesetzt ist.

Zunächst wird ein Abschätzungssatz bewiesen, der mit einem Lemma von NAGUMO [11] (vgl. auch WESTPHAL [12]) verwandt ist.

SATZ 4. *Für zwei Funktionen $v(x, y)$, $w(x, y) \in C^*(Z)$ gelte $v < w$ auf dem Rande R_p und*

$$v_x \leqq F(x, y, v, v_y, v_{yy}), \qquad w_x \geqq F(x, y, w, w_y, w_{yy}) \tag{15}$$

für alle jene Punkte $(x, y) \in Z_0$, für die (mit einer positiven Zahl ε) $w - \varepsilon \leqq v < w$, $v_y = w_y$, $v_{yy} \leqq w_{yy}$ ist. Dabei sei $F(x, y, z, p, r) \in P$ und monoton wachsend in z. Dann ist $v < w$ in Z.

BEWEIS. Mit den Bezeichnungen $d(x, y) = w(x, y) - v(x, y)$ und

$$M(x) = \operatorname{Min}\{d(x, y) \mid y \in \overline{G}\}$$

lautet die Behauptung $M(x) > 0$. Auf R_p ist $0 < \delta \leqq d(x, y)$ bei geeignetem δ; die in I stetige Funktion $M(x)$ hat also einen Anfangswert $M(0) > 0$. Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es zwei Stellen $\xi < \xi_0$ mit der Eigenschaft

$$0 < M(x) < \operatorname{Min}(\delta, \varepsilon) \quad \text{für} \quad \xi \leqq x < \xi_0, \qquad M(\xi_0) = 0.$$

Zu jedem solchen x gäbe es (mindestens) einen inneren Punkt $\bar{y} = \bar{y}(x) \in G$, in dem die Funktion $d(x, y)$ ihr Minimum $M(x)$ annimmt, d.h. es wäre

$$M(x) = d > 0, \quad d_y = 0, \quad d_{yy} \leqq 0 \quad \text{im Punkt } (x, \bar{y}(x)).$$

Dann würde sich wegen der Monotonie von F in z und r zunächst

$$d_x = w_x - v_x \geqq F(x, y, w, w_y, w_{yy}) - F(x, y, v, v_y, v_{yy}) \geqq 0$$

im Punkte $(x, \bar{y})$ und sodann wegen

$$M(x) - M(x - h) \geqq d(x, \bar{y}(x)) - d(x - h, \bar{y}(x))$$

die Ungleichung $\underline{D}_- M(x) \geqq d_x(x, \bar{y}) \geqq 0$, also ein monotones Wachsen von $M(x)$ im Intervall $\xi \leqq x < \xi_0$ ergeben. Letzteres steht aber im Widerspruch zur Wahl von ξ und ξ_0, womit Satz 4 bewiesen ist.

ZUSATZ. *Der Satz 4 läßt folgende Verschärfung zu. Ist $d = w - v$ und*

$$\delta(\bar{x}) = \{\operatorname{Min} d(x, y) \mid (x, y) \in R_p, \ 0 \leqq x \leqq \bar{x}\},$$

so gilt sogar $d(x, y) \geqq \delta(x)$ in Z, falls die in der Voraussetzung vorkommende Zahl $\varepsilon \geqq \delta(0)$ ist. — Der Beweis muß nur geringfügig modifiziert werden.

Die in Satz 4 von der Funktion F geforderten Eigenschaften kommen insbesondere den von y, p und r unabhängigen Funktionen $g(x, z)$ aus der (in Nr. 2 definierten) Klasse G zu. Von dieser Bemerkung machen wir beim folgenden Eindeutigkeitssatz Gebrauch.

Satz 5. *Zwischen der Funktion $f \in P$ und einer geeigneten Funktion $g(x, z) \in G\big(o(1)\big)$ bestehe die Relation*

$$f(x, y, \bar{z}, p, r) - f(x, y, z, p, r) \leqq g(x, \bar{z} - z) \quad \text{für } z \leqq \bar{z} \tag{16}$$

(und $(x, y) \in Z_0$, p, r beliebig). Dann hat das Problem B höchstens eine Lösung.

Beweis. Es seien u und $\bar{u}$ zwei Lösungen und $d = \bar{u} - u$. Wir wollen zeigen, daß Satz 4 angewandt werden kann auf die Funktionen $g = F$, $d = v$ und $z = w$, wobei $z(x, y) = z(x)$ eine Funktion von der in der Bedingung G genannten Art sein soll. In der Tat gilt für alle Punkte mit $0 \leqq d \leqq z$, $d_y = 0$, $d_{yy} \leqq 0$ nach (14) und (16)

$$\begin{aligned} d_x &= f(x, y, \bar{u}, \bar{u}_y, \bar{u}_{yy}) - f(x, y, u, u_y, u_{yy}) \\ &\leqq f(x, y, \bar{u}, u_y, u_{yy}) - f(x, y, u, u_y, u_{yy}) \leqq g(x, d) \end{aligned}$$

und $z' = z_x \geqq g(x, z)$. Da ferner die Funktion $d(x, y)$ auf R_p verschwindet und für $x \to 0$ (gleichmäßig in y) $o(1)$ ist, während $z(x) > 0$ und $\neq o(1)$ ist, gibt es beliebig kleine positive α mit der Eigenschaft, daß $d(\alpha, y) < z(\alpha)$ für alle $y \in \bar{G}$ ist. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 4 für den Hyperzylinder $\{\alpha \leqq x \leqq a\} \times \bar{G}$ erfüllt. Nach ihm ist also $d \leqq z$ in jedem solchen Hyperzylinder, d.h. in Z. Vertauscht man in der vorstehenden Argumentation u und $\bar{u}$, so ergibt sich $-d \leqq z$. Da die positive Funktion z beliebig klein gewählt werden kann, ist $d = 0$ oder $u = \bar{u}$.

Dieser Satz stellt eine Übertragung von Satz 2 auf parabolische Differentialgleichungen dar. Die entsprechende Übertragung des Eindeutigkeitssatzes von Kamke auf parabolische Gleichungen wurde von Giuliano [*13*] durchgeführt. Am Ende der vorigen Nummer wurden die verschiedenen Eindeutigkeitssätze für das Problem A miteinander verglichen. Das entsprechende Verhältnis besteht auch zwischen dem Satz von Giuliano und Satz 5. In diesem Zusammenhang sei noch erwähnt, daß es Szarski [*15*, Satz 3.1] gelang, den Satz von Giuliano auf Systeme von parabolischen Differentialgleichungen (von spezieller Gestalt) auszudehnen. Die Methode von Szarski kann so abgeändert werden, daß an Stelle der in Satz 3.1 der zitierten Arbeit vorkommende Funktionen σ (die unserem g entspricht) eine Funktion $\sigma \in G\big(o(1)\big)$ stehen kann. Hier sollen diese Gedanken jedoch nicht weiter verfolgt werden.

Dagegen soll darauf hingewiesen werden, daß bei all diesen Eindeutigkeitskriterien ein charakteristischer Unterschied zwischen den beiden Problemen A und B besteht. Beim ersteren ist die Differenz $d(x)$ zweier Lösungen sicher $o(x)$ (solange Lösungen im klassischen Sinne betrachtet werden), während beim letzteren von dieser Differenz nur $d(x, y) = o(1)$ für $x \to 0$ ausgesagt werden kann. Deshalb ist die Klasse der zugelassenen Funktionen $g(x, z)$ beim Problem B kleiner [bei Satz 2 muß $g \in G\big(o(x)\big)$, bei Satz 5 $g \in G\big(o(1)\big)$

sein, und ähnlich ist es bei den Sätzen vom Kamke-Iyanaga-Typus]. Man könnte natürlich von einer Lösung u des Problems B auch verlangen, daß u, u_x, u_y, u_{xy} in Z stetig (d.h. in Z_0 gleichmäßig stetig) sind und daß (13) in ganz Z gilt. Dann ist die Differenz zweier Lösungen $o(x)$, und in der Abschätzung (16) von Satz 5 können Funktionen $g \in G(o(x))$ zugelassen werden. Diese Möglichkeit wurde von NICKEL [*18*, S. 9] für beliebige, nicht notwendig zylindrische Bereiche Z untersucht. Es ist klar, daß damit den Anfangswerten Differenzierbarkeitseigenschaften auferlegt werden.

Zum Schluß erwähnen wir, daß die Sätze 4 und 5 nicht nur für Hyperzylinder Z, sondern für beliebige beschränkte Gebiete $\subset R_{m+1}$ gültig sind. Bei der Definition des Randes R_p hat man dann wie in [*11*] zu verfahren.

4. Hyperbolische Differentialgleichungen

Es sei R ein Rechteck $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$ $(a, b > 0)$, R_0 die Menge der Punkte aus R mit $xy > 0$ und E bzw. E_0 die Menge der Punkte (x, y, u, v, w) eines 5-dimensionalen Raumes, für die $(x, y) \in R$ bzw. $\in R_0$ und u, v, w beliebig sind,

$$E = R \times \{-\infty < u, v, w < \infty\}, \qquad E_0 = R_0 \times \{-\infty < u, v, w < \infty\}.$$

Das Problem C ist das charakteristische Anfangswertproblem für die Differentialgleichung

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y). \tag{17}$$

Aus der Klasse $C^* = C^*(R)$ der in R stetigen und mit stetigen Ableitungen z_x, z_y und z_{xy} versehenen Funktionen $z(x, y)$ ist eine Funktion $u(x, y)$ gesucht, die in R der Gl. (17) genügt und die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = \sigma(x) \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq a, \qquad u(0, y) = \tau(y) \quad \text{für} \quad 0 \leqq y \leqq b \tag{18}$$

befriedigt; dabei sind $\sigma(x)$ und $\tau(y)$ vorgegebene stetig differenzierbare Funktionen und $\sigma(0) = \tau(0)$.

Wir behandeln sogleich den etwas allgemeineren Fall, daß $u = (u_1, \ldots, u_n)$ und $f = (f_1, \ldots, f_n)$ Vektorfunktionen sind; (17) stellt dann ein hyperbolisches System dar, und in (18) sind unter σ und τ natürlich ebenfalls Vektorfunktionen zu verstehen.

SATZ 6. *Die (von 5 reellen Variablen abhängende) Funktion $F(x, y, u, v, w)$ sei in E_0 erklärt und monoton wachsend in den drei letzten Variablen. Für eine Vektorfunktion $d = (d_1, \ldots, d_n) \in C^*(R)$ $(n \geqq 1)$ und eine skalare Funktion $z \in C^*(R)$ möge*

$$\|d_{xy}\| \leqq F(x, y, \|d\|, \|d_x\|, \|d_y\|), \qquad z_{xy} \geqq F(x, y, z, z_x, z_y) \tag{19}$$

in R_0 und

$$\begin{cases} \|d(0, 0)\| < z(0, 0), & \|d_x(x, 0)\| < z_x(x, 0) \quad \textit{für} \quad 0 \leqq x \leqq a, \\ \|d_y(0, y)\| < z_y(0, y) & \textit{für} \quad 0 \leqq y \leqq b \end{cases} \tag{20}$$

gelten. Dann ist im ganzen Rechteck R

$$\|d\| < z, \quad \|d_x\| < z_x, \quad \|d_y\| < z_y. \tag{21}$$

Diesem Satz entspricht bei gewöhnlichen Differentialgleichungen der Satz 1'. Für den Fall $n=1$ wurde vor kurzem in [19, S. 446] ein Beweis gegeben; er ist auch für $n>1$ und für beliebige Normen gültig.

Weitgehende Analogien zu Nr. 2 werden sich auch im weiteren Verlauf zeigen. Entsprechend zur Klasse G definieren wir eine die Funktionen $h(x, y, u, v, w)$ betreffende Funktionenklasse H.

(H) $h(x, y, u, v, w)$ ist in E_0 erklärt und in u, v, w monoton wachsend; zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $\delta>0$ und eine Funktion $z(x, y)\in C^*(R_0)$, für die

$$z_{xy} \geqq h(x, y, z, z_x, z_y) \quad \text{in } R_0 \tag{22}$$

und

$$\delta x y < z(x, y) < \varepsilon, \quad \delta y < z_x(x, y), \quad \delta x < z_y(x, y) \quad \text{in } R_0 \tag{23}$$

ist.

Hierbei bedeutet $z\in C^*(R_0)$ natürlich, daß z, z_x, z_y, z_{xy} in R_0 stetig sind.

Satz 7 (Eindeutigkeitssatz). *Die Funktion f gestatte für $(x, y)\in R_0$ und beliebige Vektoren $u, \bar{u}, \ldots, \overline{w}$ eine Abschätzung*

$$\|f(x, y, u, v, w) - f(x, y, \bar{u}, \bar{v}, \overline{w})\| \leqq h\left(x, y, \|u-\bar{u}\|, \|v-\bar{v}\|, \|w-\overline{w}\|\right) \tag{24}$$

mit $h\in H$. Ferner mögen die beiden Anfangswertprobleme für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{cases} v'(y) = f\left(0, y, \tau(y), v, \tau'(y)\right), & v(0) = \sigma'(0) \qquad (0 \leqq y \leqq b) \\ w'(x) = f\left(x, 0, \sigma(x), \sigma'(x), w\right), & w(0) = \tau'(0) \qquad (0 \leqq x \leqq a) \end{cases} \tag{25}$$

je höchstens eine Lösung besitzen. Dann hat das Problem C höchstens eine Lösung.

Beweis. Die Eindeutigkeit der beiden Probleme (25) ist gerade die Bedingung dafür, daß zwei beliebige Lösungen u und $\bar{u}$ auf den Charakteristiken $x=0$ und $y=0$ mit ihren Ableitungen erster Ordnung übereinstimmen. Aus der Differentialgleichung (17) folgt dann, daß auf diesen Charakteristiken auch $u_{xy}=\bar{u}_{xy}$ ist. Mit R_α werde das Rechteck $\alpha < x \leqq a$, $\alpha < y \leqq b$ bezeichnet. Dann existiert, wenn $d=\bar{u}-u$ ist, zu jeder positiven Zahl δ ein positives α derart, daß

$$\|d_{xy}\| = \|\bar{u}_{xy} - u_{xy}\| < \delta \text{ in } R - R_\alpha$$

ist. Durch Integration folgt daraus

$$\|d_x\| < \delta y, \quad \|d_y\| < \delta x, \quad \|d\| < \delta x y \text{ in } R - R_\alpha. \tag{26}$$

Ferner ist in R_0 nach (17) und (24)

$$\|d_{xy}\| = \|f(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y) - f(x, y, u, u_x, u_y)\| \leqq h\left(x, y, \|d\|, \|d_x\|, \|d_y\|\right). \tag{27}$$

Der Satz 6 ist damit anwendbar auf $F=h$ und das Rechteck R_α (statt R) sowie auf $d=\bar{u}-u$ und eine den Ungleichungen (22), (23) genügende Funktion $z(x, y)$. Die Voraussetzung (20), in der jetzt überall Null durch α zu ersetzen ist, ist nach (23) und (26) erfüllt. Damit ist gezeigt, daß $\|d\|<z$, also $d=0$ ist.

In den folgenden Beispielen zu Satz 7 bedeuten durchweg α, β und γ Funktionen von x und y, die in R_0 erklärt und nicht negativ sind und für die $\alpha+\beta+\gamma=1$ ist, $k(x, y)$ und $l(x)$ positive Funktionen aus $C^0(R_0)$ bzw. $C^0(0<x\leqq a+b)$, deren Integrale

$$K(x, y)=\int_0^x\int_0^y k(s, t)\,ds\,dt, \qquad L(x)=\int_0^x l(s)\,ds$$

in R_0 bzw. $0<x\leqq a+b$ endlich sind, und $\omega(z)$ eine die Eigenschaften (β) von Nr. 1 besitzende, monoton wachsende Funktion. Ferner soll durch $g(x, z)\in G^*$ ausgedrückt werden, daß g aus der in Nr. 2 definierten Klasse G ist und daß die in dieser Definition vorkommenden Funktionen $z(x)$ statt (8) sogar der (nur unwesentlich schärferen) Bedingung „$\delta x\leqq z(x)\leqq\varepsilon$ für ein geeignetes $\delta>0$“ genügen.

Beim Aufsuchen von Funktionen $h\in H$ sind zwei verschiedene Wege möglich. Man kann erstens eine Familie von Funktionen $z(x, y)$ vorgeben und dazu h so bestimmen, daß (22) gilt; umgekehrt wird man auf Grund von Analogien zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen gewisse naheliegende Ansätze für h machen und dann versuchen, dazu geeignete Funktionen $z(x, y)$ aufzufinden.

BEISPIEL 1. Der wohl einfachste Ansatz

$$z(x, y)=C\,x\,y \qquad (C>0)$$

genügt wegen $z_{xy}=z/x\,y=z_x/y=z_y/x=C$ den Bedingungen (22), (23), wenn

$$h(x, y, u, v, w)=\alpha(x, y)\,\frac{u}{x\,y}+\beta(x, y)\,\frac{v}{y}+\gamma(x, y)\,\frac{w}{x} \tag{28}$$

ist. Der durch diese Funktion h gegebene „*Eindeutigkeitssatz nach Nagumo*“ [man vgl. (ε) von Nr. 1] wurde für den Fall, daß α, β und γ konstant sind, auf anderem Wege von WALTER [19] bewiesen und kurz darauf von DIAZ und WALTER [21] und SHANAHAN [20] auf stetige Funktionen α, β, γ ausgedehnt. Satz 7 zeigt indessen, daß eine Stetigkeitsforderung unnötig ist.

BEISPIEL 2. Die seit langem bekannte Lipschitz-Bedingung $h=K(u+v+w)$ läßt sich aus Satz 7 einfach ableiten; es genügt, $z(x, y)=C\exp[K(x\,y+2\,y+2x)]$ zu setzen. Wir wollen zeigen, daß auch eine allgemeine Lipschitz-Bedingung

$$h(x, y, u, v, w)=k(x, y)\,u+l(y)\,v+l(x)\,w \tag{29}$$

zulässig ist. Für die Funktionen

$$z(x, y)=C\exp[K(x, y)+2L(x)+2L(y)] \qquad (C>0)$$

ist nämlich, wenn wir $l(x) \geqq 1$ annehmen, z, z_x und $z_y \geqq C > 0$,

$$z_{xy} = k\,z + [K_x + 2l(x)]\,[K_y + 2l(y)]\,z$$

und

$$h(x, y, z, z_x, z_y) = k\,z + l(y)\,[K_x + 2l(x)]\,z + l(x)\,[K_y + 2l(y)]\,z,$$

woraus die Gültigkeit von (22) sofort folgt.

Beispiel 3. Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man die Beispiele (ε) und (α) verallgemeinern zu $g(x, z) = z\left[\begin{smallmatrix}1\\x\end{smallmatrix} + l(x)\right] \in G$. Dies legt die Vermutung nahe, daß auch die die Beispiele 1 und 2 umfassende Funktion

$$(30)\qquad h(x, y, u, v, w) = u\left[\frac{\alpha}{xy} + k(x, y)\right] + v\left[\begin{smallmatrix}\beta\\y\end{smallmatrix} + l(y)\right] + w\left[\frac{\gamma}{x} + l(x)\right]$$

aus der Klasse H ist. Eine elementare Rechnung, deren Durchführung dem Leser überlassen wird, zeigt, daß die Funktionen

$$z(x, y) = C\,x\,y \exp[K(x, y) + A\,L(x) + A\,L(y)]$$

allen an sie gestellten Forderungen genügen, wenn die Konstante A die drei Ungleichungen

$$(31)\qquad A \geqq (1-\beta)^{-1}, \qquad A \geqq (1-\gamma)^{-1}, \qquad A \geqq 2$$

erfüllt. Die in (30) definierte Funktion h ist also in H gelegen, wenn eine solche Konstante A existiert, z.B. wenn $\alpha = \alpha(x, y) \geqq \delta > 0$ in R_0 ist.

Beispiel 4. Für den Ansatz

$$h(x, y, u, v, w) = h^*(x + y, u + v + w), \qquad z(x, y) = \varphi(x + y)$$

lauten die Bedingungen (22), (23) mit $t = x + y$

$$(32)\qquad \varphi'' \geqq h^*(t, \varphi + 2\varphi'), \qquad \delta t^2 \leqq \varphi(t) \leqq \varepsilon, \qquad \delta t \leqq \varphi'(t).$$

Sie sind z.B. erfüllbar für alle Funktionen

$$(33)\qquad h(x, y, u, v, w) = \frac{1}{2 + a + b}\,g(x + y, u + v + w) \qquad \text{mit} \qquad g(x, z) \in G^*.$$

Ist nämlich

$$\delta t \leqq \zeta(t) \leqq \varepsilon, \qquad \zeta'(t) \geqq g(t, \zeta)$$

und

$$\varphi(t) = \frac{1}{2 + a + b} \int_0^t \zeta(s)\,ds,$$

so ist wegen der Monotonie von ζ und g

$$(2 + a + b)\,\varphi(t) \leqq (a + b)\,\zeta(t), \qquad \text{also} \qquad \zeta \geqq \varphi + 2\varphi'$$

und deshalb

$$z_{xy}(x, y) = \varphi''(x + y) = \frac{\zeta'(x + y)}{2 + a + b} \geqq \frac{1}{2 + a + b}\,g(x + y, \zeta)$$
$$\geqq \frac{1}{2 + a + b}\,g(x + y, \varphi + 2\varphi') = h(x, y, z, z_x, z_y).$$

In (33) ist enthalten eine *Übertragung des Satzes von Osgood und Montel*, nämlich

$$h(x, y, u, v, w) = l(x+y)\,\omega(u+v+w) \in H. \tag{34}$$

BEISPIEL 5. Im Hinblick auf Beispiel 2 könnte man vermuten, daß eine Eindeutigkeitsbedingung vom Montel-Typ auch in der gegenüber (34) verschärften Form

$$h(x, y, u, v, w) = k(x, y)\,\omega(u) + l(y)\,\omega(v) + l(x)\,\omega(w) \tag{35}$$

aufgestellt werden kann. Ein Versuch mit den durch

$$\int_C^z \frac{ds}{\omega(s)} = K(x, y) + A\,L(x) + A\,L(y) \qquad (A, C > 0) \tag{36}$$

definierten Funktionen $z(x, y)$ führt auf

$$z_x = \omega(z)\,[K_x + A\,l(x)], \qquad z_y = \omega(z)\,[K_y + A\,l(y)],$$
$$z_{xy} = k\,\omega(z) + \omega(z)\,\omega'(z)\,[K_x + A\,l(x)]\,[K_y + A\,l(y)];$$

demnach erhält man auf diese Weise nur

$$h = k(x, y)\,\omega(u) + l(y)\,v + l(x)\,w \in H, \quad \text{falls} \quad \omega'(z) \geqq \delta > 0 \tag{37}$$

ist (man wähle $A = 2/\delta$).

Durch Betrachtung der Funktionen $\bar{z}(x, y) = x\,y\,z(x, y)$, wobei z durch (36) gegeben wird, ergibt sich nach einiger Rechnung, daß auch

$$h = \frac{\alpha}{x\,y}\,u + x\,y\,k(x, y)\,\omega\left(\frac{u}{x\,y}\right) + v\left[\frac{\beta}{y} + l(y)\right] + w\left[\frac{\gamma}{x} + l(x)\right] \tag{38}$$

aus H ist, falls eine den Ungleichungen (31) genügende Konstante A existiert. Beispiel 3 ist darin für $\omega(z) = z$ enthalten. Man vgl. hierzu das Beispiel (η) von Nr. 1. — Ob der Ansatz (35) sich rechtfertigen läßt, bleibt offen.

BEISPIEL 6. Bei einem Ansatz von der Form

$$h(x, y, u, v, w) = h^*(x\,y, u, x\,v, y\,w), \qquad z(x, y) = \varphi(x\,y)$$

sind die Bedingungen $(t = x\,y)$

$$\varphi' + t\,\varphi'' \geqq h^*(t, \varphi, t\,\varphi', t\,\varphi'), \qquad \delta t \leqq \varphi(t) \leqq \varepsilon, \qquad \delta \leqq \varphi'(t) \tag{39}$$

nachzuprüfen. Nun möge

$$\begin{cases} \zeta'(t) \geqq h^*(t, \zeta, \zeta, \zeta), & \delta t \leqq \zeta(t) \leqq \varepsilon \\ t\,h^*(t, z, z, z) \geqq z & \text{für} \quad z > 0 \end{cases} \tag{40}$$

gelten. Die Funktion

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{\zeta(s)}{s}\,ds$$

hat dann alle Eigenschaften (39). Wegen der zweiten Zeile in (40) ist nämlich $\zeta(t)/t$ monoton wachsend, also $\varphi(t) \leqq \zeta(t)$ und daher

$$\varphi' + t\varphi'' = \zeta' \geqq h^*(t, \zeta, \zeta, \zeta) \geqq h^*(t, \varphi, t\varphi', t\varphi').$$

Die Bedingung (40) ist wesentlich handlicher als (39). Setzen wir z.B.

$$h^*(t, u, p, q) = \alpha\, g(t, u) + \beta\, g(t, p) + \gamma\, g(t, q), \tag{41}$$

wobei zunächst α, β, γ konstant, $g(x, z) \in G^*$ sowie $g(x, z) \geqq z/x$ sein soll (letzteres bedeutet, daß g die Nagumo-Bedingung enthält), so kann der Bedingung (40) Genüge getan werden. Man überlegt sich leicht, daß in (41) α, β und γ auch Funktionen sein dürfen. Damit ist also gezeigt, daß unter den genannten Voraussetzungen über g

$$h(x, y, u, v, w) = \alpha\, g(xy, u) + \beta\, g(xy, xv) + \gamma\, g(xy, yw) \in H \tag{42}$$

ist.

Hierin ist für $g(x, z) = z/x$ das Beispiel 1 enthalten; weitere interessante Spezialfälle ergeben sich mit $g(x, z) = z(1+z)/x$ und mit Beispiel (η) von Nr. 1.

Der Satz 7 enthält außer der Abschätzung (24) noch die weitere Forderung, daß die beiden Aufgaben (25) eindeutig lösbar sind. *Unter der Voraussetzung, daß $f(x, y, u, v, w)$ in E stetig ist, folgt diese Eindeutigkeit in vielen Fällen, im besonderen bei unseren Beispielen 1—5, aus der entsprechenden Ungleichung* (24). Wir wollen den einfachen Gedankengang, der diese Behauptung rechtfertigt, am Beispiel (38) skizzieren.

Aus (24) folgt nämlich in diesem Fall

$$\|f(x, y, \tau(y), v, \tau'(y)) - f(x, y, \tau(y), \bar{v}, \tau'(y))\| \leqq \|v - \bar{v}\| \left[\begin{matrix}\beta \\ \gamma\end{matrix} + l(y)\right], \tag{43}$$

allerdings zunächst nur in R_0. Wegen der Stetigkeit von f gilt dies auch noch für $x = 0$; damit wird (43) zu einer Eindeutigkeitsbedingung für die *gewöhnliche* Differentialgleichung $v'(y) = f(0, y, \tau(y), v, \tau'(y))$. Entsprechendes gilt für die zweite Gl. (25). — Bei dem Beispiel 4 muß man, um so schließen zu können, voraussetzen, daß $g(x, z)$ für jedes feste z in x stetig ist $(0 < x \leqq a)$.

Die Eindeutigkeitsforderung bezüglich der beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen (25) ist jedoch bei unstetigem f im allgemeinen *nicht entbehrlich*. Hierzu geben wir ein

Beispiel. Ist

$$f(x, y, u, v, w) = \begin{cases} v/y & \text{für } y \neq 0 \\ 2w/x & \text{für } y = 0,\ x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = y = 0, \end{cases}$$

so sind alle Funktionen $u(x, y) = C x^2 y$ Lösungen der Differentialgleichung (17) mit verschwindenden Anfangswerten auf den Charakteristiken $x = 0$ und $y = 0$. Trotzdem genügt die Funktion f in R_0 einer Nagumo-Bedingung (s. Beispiel 1) mit $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$.

Beim Beweis von Satz 7 wird diese Voraussetzung über (25) nur benötigt, um die Abschätzung (26) herzuleiten [beim obigen Beispiel ist (26) in der Tat verletzt]. Ohne jede Voraussetzung über f kann man statt (26) nur das folgende behaupten: Zu jedem $\delta>0$ gibt es ein $\alpha>0$, so daß

$$(26') \qquad \begin{cases} \|d_x\|<\delta \quad \text{für} \quad 0\leqq x\leqq a, \quad 0\leqq y\leqq \alpha, \\ \|d_y\|<\delta \quad \text{für} \quad 0\leqq x\leqq \alpha, \quad 0\leqq y\leqq a, \\ \|d\|<\delta \quad \text{in} \quad R-R_\alpha. \end{cases}$$

ist. Das folgt sofort aus $d(x,0)=d(0,y)=d_x(x,0)=d_y(0,y)=0$ und der Stetigkeit dieser Funktionen. Wenn man nun bei der Definition von H die Forderung (23) verschärft zu

$$(23') \qquad \delta<z(x,y)<\varepsilon, \quad \delta<z_x(x,y), \quad \delta<z_y(x,y) \quad \text{in } R_0$$

(die entsprechende Klasse von Funktionen $h(x,y,u,v,w)$ werde mit H_0 bezeichnet), so bleibt der Beweis von Satz 7 auch dann richtig, wenn statt (26) nur (26′) gilt. Damit ist also gezeigt, daß in Satz 7 die an (25) geknüpfte Eindeutigkeitsvoraussetzung entbehrt werden kann, sobald h in H_0 liegt. Zu H_0 gehören u.a. die in (29) und (34) angegebenen Funktionen.

Eine naheliegende Verallgemeinerung von Satz 7 sei noch erwähnt. Mit h_M bezeichnen wir die Funktion

$$(44) \qquad h_M(x,y,u,v,w)=h\big(x,y,\min(u,M),\min(v,M),\min(w,M)\big).$$

Dann genügt es, wenn in Satz 7 statt „$h\in H$" nur „$h_M\in H$ für jedes positive M" vorausgesetzt wird. Ist nämlich (mit den Bezeichnungen des Beweises) M größer als die Funktionen $\|d\|$, $\|d_x\|$, $\|d_y\|$, so gilt die Abschätzung (27) auch mit h_M an Stelle von h, und der Beweis kann mit h_M durchgeführt werden. Wir fassen zusammen:

ZUSATZ ZU SATZ 7. *Der Satz 7 bleibt richtig, wenn die in der Abschätzung* (24) *auftretenden Funktion h die Eigenschaft hat, daß $h_M\in H$ für jedes positive M ist. Gilt sogar $h_M\in H_0$ [H_0 ergibt sich aus H durch Ersetzung von* (23) *durch* (23′)] *für alle positiven M, so ist die zusätzliche Voraussetzung, daß die beiden Anfangswertprobleme* (25) *höchstens eine Lösung besitzen, überflüssig.*

Zieht man die gewöhnlichen Differentialgleichungen zu einem Vergleich heran, so kann man sagen, daß der Klasse H die Klasse G, der Klasse H_0 die Klasse $G\big(o(1)\big)$ entspricht.

BEISPIEL 7. Die Funktion $h(x,y,u,v,w)$ sei in E stetig und monoton wachsend in u, v und w, und es sei $f(x,y,0,0,0)=0$. Ferner sei für jedes δ mit $0<\delta<1$ die Funktion $\zeta(x,y)\equiv 0$ die einzige in R^δ: $0\leqq x\leqq \delta a$, $0\leqq y\leqq \delta b$ stetige, nichtnegative Funktion mit fast überall in R^δ existierenden nichtnegativen Ableitungen ζ_x, ζ_y, für die

$$(45) \qquad \zeta(x,y)=\int_0^x\int_0^y h(s,t,\zeta,\zeta_x,\zeta_y)\,ds\,dt \quad \text{in } R^\delta$$

ist. Dann ist, so wird behauptet, $h_M\in H_0$ für jedes $M>0$.

Zum Beweis betrachten wir die durch

$$\text{46)} \qquad \begin{cases} z^0(x,y) = 1 + x + y + \int_0^x \int_0^y h(s,t,M,M,M)\, ds\, dt \\ z^{n+1}(x,y) = \frac{1+x+y}{n+1} + \int_0^x \int_0^y h_M(s,t,z^n,z_x^n,z_y^n)\, ds\, dt \end{cases}$$

definierte Funktionenfolge $z^n(x, y)$. Durch vollständige Induktion läßt sich leicht zeigen, daß die Funktionen z^n sowie deren Ableitungen z_x^n, z_y^n je eine monoton fallende Folge stetiger, nichtnegativer Funktionen bilden. Diese Funktionenfolgen konvergieren also gegen nichtnegative Funktionen $\varphi(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, und aus (46) folgt für $n \to \infty$

$$\text{47)} \qquad \varphi(x,y) = \int_0^x \int_0^y h_M(s,t,\varphi,\varphi_1,\varphi_2)\, ds\, dt \quad \text{in } R.$$

Daraus schließt man in der üblichen Weise, daß φ stetig und daß fast überall in R $\varphi_1 = \varphi_x$, $\varphi_2 = \varphi_y$ ist. Ist δ_1 die größte Zahl derart, daß $\varphi \equiv 0$ in R^{δ_1} ist, so gibt es im Falle $\delta_1 < 1$ ein $\delta > \delta_1$, so daß $\varphi \leqq M$ in R^δ sowie $\varphi_x \leqq M$, $\varphi_y \leqq M$ fast überall in R^δ ist (man beachte, daß h_M für positive u, v, w beschränkt ist). Damit ist φ eine in R^δ nicht identisch verschwindende Lösung von (45), womit ein Widerspruch erreicht ist. Es ist also $\varphi \equiv 0$ in R, d.h. die Folge z^n konvergiert gleichmäßig in R gegen Null (da nach einem bekannten Satz die monotone Konvergenz von stetigen Funktionen mit stetigem Grenzwert immer gleichmäßig ist). Die Funktionen z^n genügen außerdem der Ungleichung (22) und sind deshalb geeignet zum Nachweis, daß $h_M \in H_0$ ist.

Abschließend sei bemerkt, daß der die Eindeutigkeit betreffende Teil der beiden Sätze von Shanahan [20] in Beispiel 1 und 7 enthalten ist (genau genommen besteht ein kleiner Unterschied, da Shanahan Lösungen in einem etwas anderem Sinne betrachtet).

Die Methoden und Sätze dieser Nummer können ohne Schwierigkeit auf das nichtcharakteristische Anfangswertproblem für die Gl. (3) übertragen werden. Auch ist es möglich, gewisse partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung, z.B. die Gleichung

$$u_{xyz} = f(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z, u_{xy}, u_{xz} u_{yz})$$

auf diese Weise zu behandeln.

Literatur

[1] Picard, E.: Sur les méthodes d'approximations successives dans la théorie des équations différentielles. (Note I in Bd. 4 von G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, S. 353–367. Paris 1896.)

[2] Osgood, W. F.: Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $dy/dx = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitzschen Bedingung. Monatsh. Math. u. Physik **9**, 331–345 (1898).

[3] Rosenblatt, A.: Über die Existenz von Integralen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Ark. Mat. Astronom. Fys. **5**, Nr. 2 (1909).

[4] Montel, P.: Sur l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure d'une équatio différentielle. Bull. des sciences math. **50**, 205—217 (1926).
[5] Tonelli, L.: Sull' unicità della soluzione di un' equazione differenziale ordinari Atti della R. Accad. naz. dei Lincei, Rendiconti (6) **1**, 272—277 (1925).
[6] Nagumo, M.: Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Diffe rentialgleichungen erster Ordnung. Japanese J. Math. **3**, 107—112 (1926).
[7] Iyanaga, S.: Über die Unitätsbedingungen der Lösung der Differentialgleichun $y' = f(x, y)$. Japanese J. Math. **5**, 253—257 (1928).
[8] Müller, M.: Über die Eindeutigkeit der Integrale eines Systems gewöhnliche Differentialgleichungen und die Konvergenz einer Gattung von Verfahren zu Approximation dieser Integrale. Sitzungsber. Heidelberger Akad. d. Wiss., math. naturw. Kl., 1927, 9. Abh.
[9] Kamke, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930.
[10] Kamke, E.: Über die eindeutige Bestimmtheit der Integrale von Differentialgle chungen. II. Sitzungsber. Heidelberger Akad. d. Wiss., math.-naturw. Kl., 193 17. Abh.
[11] Nagumo, M., et S. Simoda: Note sur l'inégalité différentielle concernant les équation du type parabolique. Proc. Japan Acad. **27**, 536—539 (1951).
[12] Westphal, H.: Zur Abschätzung der Lösung nichtlinearer parabolischer Differential gleichungen. Math. Z. **51**, 690—695 (1949).
[13] Giuliano, L.: Sull' unicità della soluzione per una classe di equazioni differenzial alle derivate parziali, paraboliche, non lineari. Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., C Sci. fis. mat. natur. (8) **12**, 260—265 (1952).
[14] Coddington, E. A., and N. Levinson: Theory of Ordinary Differential Equations New York 1955.
[15] Szarski, J.: Sur la limitation et l'unicité des solutions d'un système non-linéair d'équations paraboliques aux dérivées partielles du second ordre. Annales Polonic Mathematici II, **2**, 237—249 (1955).
[16] Kisynski, J.: Sur l'existence et l'unicité des solutions des problèmes classique relatifs a l'équation $s = F(x, y, z, p, q)$. Annales universitatis Mariae Curie-Sklodow ska **11**, 73—112 (1957).
[17] Guglielmino, F.: Sulla risoluzione del problema di Darboux per l'equazione $s = f(x, y, z)$. Bollettino della Unione Matematica Italiana **13**, 308—318 (1958).
[18] Nickel, K.: Einige Eigenschaften von Lösungen der Prandtlschen Grenzschicht Differentialgleichungen. Arch. rational Mech. Anal. **2**, 1—31 (1958).
[19] Walter, W.: Über die Differentialgleichung $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$. Teil I, Math. Z **71**, 308—324 (1959); Teil II, Math. Z. **71**, 436—453 (1959).
[20] Shanahan, J. P.: On uniqueness questions for hyperbolic differential equations Technical Note AFOSR (erscheint im Pacific J. Math.).
[21] Diaz, J. B., and W. Walter: On uniqueness theorems for ordinary differentia equations and for partial differential equations of hyperbolic type. Transactions AM (im Druck).
[22] Walter, W.: On the existence theorem of Caratheodory for ordinary and hyperboli equations. Technical Note BN—172, AFOSR.

Institut für Angewandte Mathematik der Technischen Hochschule Karlsruhe

(Eingegangen am 17. Dezember 1959)

Nickel, K.
Math. Zeitschr. 74, 209—220 (1960)

Ein Eindeutigkeitssatz für instationäre Grenzschichten

Herrn Erich Kamke zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von
Karl Nickel

1. Einleitung. Die Prandtlschen Differentialgleichungen einer zweidimensionalen instationären Wand-Grenzschicht in einem inkompressiblen Medium der kinematischen Zähigkeit $\nu > 0$ lauten (vgl. etwa H. Schlichting [1], S. 167/68)

$$u_t + u\,u_x + v\,u_y = U_t + U\,U_x + \nu\,u_{yy}, \tag{1a}$$

$$u_x + v_y = 0. \tag{1b}$$

Darin sind $u(t, x, y)$ und $v(t, x, y)$ die beiden gesuchten Geschwindigkeitskomponenten, $U(t, x)$ ist die vorgegebene Außengeschwindigkeit, Buchstaben als Indizes bedeuten wie üblich partielle Ableitungen. Zu (1) gehören die Anfangs- und Randbedingungen

$$t = 0: \quad u = \hat{u}(x, y), \quad v = \hat{v}(x, y) \quad \text{für} \quad x_0(0) \leqq x \leqq x_1, \quad 0 \leqq y < \infty \tag{2a}$$

$$x = x_0(t): \quad u = \tilde{u}(t, y) \quad \text{für} \quad 0 < t \leqq T, \quad 0 \leqq y < \infty \tag{2b}$$

$$y = 0: \quad u = u_0(t, x), \quad v = v_0(t, x) \quad \text{für} \quad 0 < t \leqq T, \quad x_0(t) \leqq x \leqq x_1 \tag{2c}$$

$$y \to \infty: \quad u \to U(t, x)\,[1] \quad \text{für} \quad 0 < t \leqq T, \quad x_0(t) \leqq x \leqq x_1 \tag{2d}$$

mit vorgegebenen Funktionen $\hat{u}(x, y)$, $\hat{v}(x, y)$, $\tilde{u}(t, y)$ (zeitliches und räumliches Anfangs-Geschwindigkeitsprofil); $u_0(t, x)$ (Wandgeschwindigkeit) und $v_0(t, x)$ (Absauge- bzw. Ausblasegeschwindigkeit an der Wand).

Die mathematischen Fragen nach der Lösbarkeit der Gln. (1) unter den Bedingungen (2) sind noch weitgehend ungeklärt, insbesondere fehlte bisher ein Eindeutigkeitssatz. In der vorliegenden Note soll gezeigt werden, daß es unter geringen Voraussetzungen höchstens eine einzige Lösung gibt; die Frage nach der Existenz einer Lösung bleibt dagegen weiterhin offen. Dieser Eindeutigkeitssatz kann hier nur für $u \geqq 0$ bewiesen werden, insbesondere sind also Randwerte $U \geqq 0$ und $u_0 \geqq 0$ vorzuschreiben. Die Frage, ob im Falle der „Rückströmung" $u < 0$ noch Eindeutigkeit einer Lösung gilt, bleibt also unbeantwortet. Wegen der Verwandtschaft der Gln. (1) mit der Wärmeleitungsgleichung liegt jedoch die Vermutung nahe, daß für $u < 0$ die Eindeutigkeit einer Lösung nicht mehr allgemein gewährleistet ist.

Der Beweis für den angegebenen Satz wird wie im stationären Fall (vgl. [2]) mit Hilfe der Theorie der Differential-Ungleichungen geführt, die für parabolische

[1]) Diese letzte Forderung wird durch (12) noch näher präzisiert werden. Es läßt sich zeigen, daß diese „äußere Randbedingung" unter gewissen Voraussetzungen stets von selbst erfüllt ist und daher weggelassen werden darf.

Differentialgleichungen von M. NAGUMO [3] und H. WESTPHAL [4] begründet wurde. Diese Theorie bezieht sich auf explizite parabolische Differentialgleichungen der Gestalt

$$u_t = f(t, x, u, u_x, u_{xx}). \tag{3}$$

Dabei kann $x = (x_1, \ldots, x_m)$ ein Vektor sein, in diesem Falle ist $u_x = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_m})$ als m-dimensionaler Vektor, $u_{xx} = (u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \ldots, u_{x_m x_m})$ als $m \times m$-Matrix aufzufassen. Man kann das Differentialgleichungssystem (1) auf eine einzige Differentialgleichung der Gestalt (3) transformieren. Benutzt man dazu etwa die v. Misessche Transformation (vgl. Nr. 7), so ergibt sich die parabolische Differentialgleichung [vgl. (16), (17)]

$$w_\tau = \nu w (w w_{\eta\eta} + w_\eta^2) - w w_\xi + W_\tau + W W_\xi \tag{4}$$

($w(\tau, \xi, \eta)$ ist die gesuchte, $W(\tau, \xi)$ eine gegebene Funktion), die offenbar die Gestalt (3) hat. Jedoch besitzt (4) die Besonderheit, daß darin die zweite partielle Ableitung $w_{\xi\xi}$ (und auch die gemischte Ableitung $w_{\xi\eta}$) gar nicht auftritt. Dafür wird jedoch in ξ-Richtung statt zweier Randbedingungen nur noch eine einzige gefordert, so daß die Funktionswerte am zweiten Rand des Grundgebietes frei bleiben. Dieser Fall einer Lockerung der Randbedingungen unter gleichzeitiger Spezialisierung von f in (3) scheint bisher noch nicht betrachtet worden zu sein. Da er, wie die Differentialgleichung (4) der instationären Grenzschicht zeigt, von großem praktischem Interesse ist, soll das Nagumo-Westphalsche Lemma im folgenden in einer allgemeinen Gestalt formuliert werden, die auch die Gl. (4) mit ihren Randbedingungen noch umfaßt.

Es werde nämlich der Fall betrachtet, daß die Funktion f in (3) hinsichtlich l Veränderlicher x_λ nicht von den zweiten Ableitungen $u_{x_\lambda x_\mu}$ $(\lambda, \mu = 1, \ldots, l)$ abhängt. Dabei sei $0 \leqq l \leqq m$, es kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß diese x_λ gerade die l ersten Veränderlichen $x_1, \ldots, x_l$ sind. Auf den in x_λ-Richtung liegenden Randpunkten des Grundbereichs brauchen dann keine Randwerte mehr vorgeschrieben zu sein, jedoch ist jede derartige weggefallene Randbedingung durch eine Monotonie-Eigenschaft von f hinsichtlich u_x zu ersetzen. Diese geschilderte Erweiterung ist auch unabhängig von der hier betrachteten speziellen Fragestellung von Bedeutung. Daher soll sie in den Nrn. 2—4 in größerer Allgemeinheit formuliert und bewiesen werden, als für das Folgende notwendig ist. Der dort angegebene Satz bildet die Grundlage für fast alle bis heute angegebenen Abschätzungsaussagen, Einzigkeitssätze und Stabilitätsbetrachtungen; er wird hier zum ersten Male in einer allgemeinen Gestalt ausgesprochen, die sowohl die gewöhnlichen Differentialgleichungen, die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung als auch die parabolischen Differentialgleichungen umfaßt. Für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung wurde ein entsprechender Satz erstmalig von M. NAGUMO [5] angegeben. Eine Erweiterung auf Systeme ist in einer Arbeit von J. SKARSKI [6] enthalten. Von einer Übertragung des hier angegebenen Lemmas auf Systeme von parabolischen Differential-

gleichungen — die sich leicht durchführen ließe — soll jedoch der Einfachheit halber abgesehen werden. Ebenfalls bleibe die in [5] angegebene Tatsache unberücksichtigt, daß die oben angegebene Monotonie-Voraussetzung noch gemildert werden kann, wenn dafür an die Regularität des Randes des betrachteten Grundbereichs höhere Anforderungen gestellt werden.

In den Nrn. 6 bis 8 wird dann mit einem allgemeinen Satz (Nr. 5) die Eindeutigkeit der Lösungen von (1) unter den Bedingungen (2) nachgewiesen. Als einfache Folgerung läßt sich daraus zeigen, daß auch bei instationären Grenzschichten stets $u \leqq U$ bleibt, falls diese Abschätzung nur auf einem Teil des Randes des betrachteten Gebietes erfüllt ist (bei stationären Grenzschichten wurde diese Ungleichung bereits früher bewiesen, vgl. [2]). Da diese Tatsache physikalisch durchaus nicht selbstverständlich ist und eine einfache Folgerung aus dem Eindeutigkeitssatz von Nr. 8 darstellt, soll sie in Nr. 9 nachgewiesen werden.

2. Definitionen. Sämtliche im folgenden auftretenden Größen werden als reell, die Funktionen als eindeutig erklärt vorausgesetzt. Die Zahlen $m \geqq 1$ und $0 \leqq l \leqq m$ seien ganz.

Es sei G eine (einstweilen noch) beschränkte, offene Punktmenge des $(m+1)$-dimensionalen euklidischen (t, x)-Raumes der Veränderlichen t und $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Das kleinste offene Intervall, das die Projektion von G auf die t-Achse enthält, sei die Strecke $0 < t < T$. Für die Randpunkte von G werden folgende Bezeichnungen eingeführt: Γ_1 sei die Menge derjenigen Randpunkte $(\bar{t}, \bar{x})$, zu denen es eine Halbumgebung $0 \leqq \bar{t} - t < \delta$, $\sum_{\mu=1}^{m} |\bar{x}_\mu - x_\mu| < \delta$ gibt, die ganz in G liegt. Die Menge der restlichen Randpunkte von G möge in die drei Teilmengen Γ', Γ_ν und Γ_x zerfallen.

Die Randpunkte von Γ_x sollen die folgenden Eigenschaften besitzen: Zu jedem Punkt $P = (t', x') \in \Gamma_x$ gebe es zunächst eine Halbgerade $\{t \leqq t',\ x = x'\}$ in negativer t-Richtung, die ein Geradenstück mit P als einem Endpunkt mit $G + \Gamma_1 + \Gamma_x$ gemeinsam hat. Durch P gebe es weiter l Halbgeraden $\{t = t';\ x_\lambda \underset{(\geqq)}{\leqq} x'_\lambda;\ x_\mu = x'_\mu \text{ für } \mu \neq \lambda,\ \mu = 1, \ldots, m\}$ in positiver oder negativer x_λ-Richtung für $\lambda = 1, \ldots, l$, von denen jede ein Geradenstück g_λ mit P als einem Endpunkt mit $G + \Gamma_1 + \Gamma_x$ gemeinsam hat. Schließlich gebe es zu P sogar eine $(m-l)$-dimensionale Umgebung $\left\{t = t',\ x_\lambda = x'_\lambda \text{ für } \lambda = 1, \ldots, l,\ \sum_{\mu=l+1}^{m} |x_\mu - x'_\mu| < \delta\right\}$, die ganz in $G + \Gamma_1 + \Gamma_x$ liegt. Dem Punkt P werde ein Vektor $q = (q_1, \ldots, q_l)$ zugeordnet. Liegt g_λ von P aus in positiver x_λ-Richtung, so soll $q_\lambda = +1$, im anderen Falle $q_\lambda = -1$ gesetzt werden.

Von jedem Punkt $P = (t', x') \in \Gamma_\nu$ aus gebe es eine auf der Hyperebene $t = t'$ liegende Halbgerade ν [2]), die ein Geradenstück mit P als einem End-

[2]) ν tritt hier an die Stelle der inneren Normalen, eine Verwechslung mit der Bezeichnung für die kinematische Zähigkeit in den Gln. (1a) und (4) ist wohl nicht zu befürchten, da in den Anwendungen der vorliegenden Theorie auf (1a) und (4) in den Nummern 6—9 die Punktmenge Γ_ν leer ist.

punkt mit $G+\Gamma_1+\Gamma_x$ gemeinsam hat. Die Menge Γ' schließlich enthalte die restlichen Punkte des Randes. Die Mengen Γ_ν und Γ_x können leer sein (Γ_x für $l=0$), dagegen enthält Γ' mindestens die Randpunkte von G mit $t=0$. Bezeichnet man die abgeschlossene Hülle von G mit B, so gilt $B=G+\Gamma+\Gamma_1+\Gamma_x$, wenn noch $\Gamma=\Gamma'+\Gamma_\nu$ zur Abkürzung gesetzt wurde. Auf dem Rand Γ sollen Randwerte für die Differentialgleichung (3) vorgeschrieben werden und zwar der Funktionswert u auf Γ', die „Normal"ableitung u_ν auf Γ_ν, auf $\Gamma_1+\Gamma_x$ dagegen sind die Randwerte frei.

Ist die quadratische $n\times n$-Matrix $A=(a_{ik})$ positiv semidefinit, d.h. ist $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k \geqq 0$ für alle x_i $(i=1,\ldots,n)$, dann soll kurz $A\geqq 0$ geschrieben werden. Statt $-A\equiv(-a_{ik})\geqq 0$ werde auch die Abkürzung $A\leqq 0$, statt $A-B\equiv(a_{ik}-b_{ik})\geqq 0$ [$B=(b_{ik})$ sei ebenfalls eine $n\times n$-Matrix] die Schreibweise $A\geqq B$ gebraucht.

Es sei die Funktion

$$f(t, x_1, \ldots, x_m, z, p_1, \ldots, p_m, r_{l+1\,l+1}, r_{l+1\,l+2}, \ldots, r_{mm}) = f(t, x, z, p, r)$$

definiert für $(t, x)\in G+\Gamma_1+\Gamma_x$ und beliebige Werte z, $p=(p_1,\ldots,p_m)$, $r=(r_{l+1\,l+1}, r_{l+1\,l+2}, \ldots, r_{mm})$. Weiter sei f dort schwach monoton wachsend bezüglich r. Das soll heißen: Es ist $f(t, x, z, p, \bar{r})\geqq f(t, x, z, p, r)$, wenn die $(m-l)\times(m-l)$-Matrix $\bar{r}-r\geqq 0$, d.h. positiv semidefinit ist. Außerdem sei noch f für jeden Randpunkt $P\in\Gamma_x$ schwach monoton wachsend oder fallend in p_λ $(\lambda=1,\ldots,l)$, je nachdem dort die λ-te Komponente q_λ des P zugeordneten Vektors $q=(q_1,\ldots,q_l)$ positiv oder negativ ist. Die Funktion $h(t, x_1, \ldots, x_m, z)=h(t, x, z)$ sei definiert für $(t, x)\in\Gamma_\nu$ und beliebige Werte z.

Die Funktion $u(t, x_1, \ldots, x_m)=u(t, x)$ soll eine „zulässige Funktion" heißen, wenn gilt: Es sei u stetig auf B, in $G+\Gamma_1+\Gamma_x$ mögen die partiellen Ableitungen $u_t=\frac{\partial u}{\partial t}$, $u_\mu=\frac{\partial u}{\partial x_\mu}$ $(\mu=1,\ldots,m)$ und $u_{ik}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$ $(i,k=l+1,\ldots,m)$ existieren mit $u_{ik}\in C$ (die Ableitungen u_{ik} seien in G stetig und auf den Rand hinauf stetig fortsetzbar), schließlich existiere auf Γ_ν noch die Ableitung u_ν von u in Richtung ν. Zur Abkürzung werde $u_x=(u_1,\ldots,u_m)$, $u_{xx}=\{u_{ik}\}$ geschrieben. Die Gesamtheit der zulässigen Funktionen bilde die Klasse Z. Endlich seien noch Randwerte $U(t, x)\in C$ für $(t, x)\in\Gamma'$ definiert.

Mit diesen Bezeichnungen und Funktionen werde das folgende Anfangs-Randwertproblem AR eingeführt:

$$\left.\begin{aligned} &Pu\equiv u_t - f(t, x, u, u_x, u_{xx}) = 0 && \text{in} && G+\Gamma_1+\Gamma_x,\\ &R'u\equiv u - U = 0 && \text{auf} && \Gamma',\\ &R_\nu u\equiv u_\nu - h(t, x, u) = 0 && \text{auf} && \Gamma_\nu, \end{aligned}\right\} AR$$

wobei als Lösungen $u(t, x)$ nur zulässige Funktionen $u\in Z$ zugelassen sind. Ist Γ_ν leer, so liegt das erste Anfangs-Randwertproblem vor.

Zur Abschätzung der Lösungen des Anfangs-Randwertproblems AR werde noch die Klasse O der „Oberfunktionen" (bzw. U der „Unterfunktionen")

rklärt. Sie möge alle diejenigen Funktionen $u \in Z$ umfassen, die den Ungleichungen

$$\begin{cases} Pu \gtrless 0 & \text{in} \quad G + \Gamma_1 + \Gamma_x, \\ R'u \gtrless 0 & \text{auf} \quad \Gamma', \\ R_\nu u \leqq 0 & \text{auf} \quad \Gamma_\nu \end{cases} \tag{5}$$

genügen.

3. Lemma nach NAGUMO - WESTPHAL.

LEMMA. *Die Funktion $u \in Z$ sei Lösung von AR, weiter gelte $v \in U$, $w \in O$. Dann gilt auf ganz B*

$$v(t, x) < u(t, x) < w(t, x). \tag{6}$$

BEWEIS durch Antithese. Man betrachtet zunächst nur den linken Teil von (6). Es werde angenommen, die Behauptung sei falsch, d.h. es gebe Stellen $(t', x') \in G + \Gamma_1 + \Gamma_x + \Gamma_\nu$ mit $v(t', x') \geqq u(t', x')$. Wegen der Beschränktheit von G gibt es dann eine konvergente Folge (t'_n, x'_n) mit $t'_n \to \bar{t} = \inf t'$, $x'_n \to \bar{x}$ und es ist $(\bar{t}, \bar{x}) \in B$. Wegen der Stetigkeit von u und v auf B gilt dann $v(\bar{t}, \bar{x}) \geqq u(\bar{t}, \bar{x})$. Wegen $R'v < 0$ liegt daher $(\bar{t}, \bar{x})$ nicht auf Γ', d.h. $(\bar{t}, \bar{x}) \in G + \Gamma_1 + \Gamma_x + \Gamma_\nu$. Damit ist eine Annäherung von kleineren t-Werten her möglich mit dem Resultat $v(\bar{t}, \bar{x}) = u(\bar{t}, \bar{x})$.

Angenommen, es sei $(\bar{t}, \bar{x}) \in \Gamma_\nu$. Für jede Annäherung auf der Hyperebene $t = \bar{t}$ gilt dann

$$v(\bar{t}, x) - u(\bar{t}, x) \leqq v(\bar{t}, \bar{x}) - u(\bar{t}, \bar{x}) = 0, \tag{7}$$

also ist in $(\bar{t}, \bar{x})$ auch

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(v - u) = v_\nu - u_\nu \leqq 0. \tag{8}$$

Wegen $R_\nu v < 0$ und $R_\nu u = 0$ gilt dort aber auch $0 < v_\nu - h(\bar{t}, \bar{x}, v) = v_\nu - h(\bar{t}, \bar{x}, u) = v_\nu - u_\nu$. Dies steht im Widerspruch zu (8), also ist $(\bar{t}, \bar{x}) \in G + \Gamma_1 + \Gamma_x$. Nach der Voraussetzung über den Randteil Γ_x ist dann eine Annäherung auf der Halbgeraden $(t, \bar{x})$ von kleineren t-Werten her möglich, diese ergibt

$$v_t(\bar{t}, \bar{x}) \geqq u_t(\bar{t}, \bar{x}). \tag{9}$$

Angenommen, es sei nun $(\bar{t}, \bar{x}) \in G + \Gamma_1$. Dann findet man aus (7) wegen der Existenz von u_x, v_x und der Existenz und Stetigkeit von u_{xx}, v_{xx} die Beziehungen $v_x(\bar{t}, \bar{x}) = u_x(\bar{t}, \bar{x})$ und $v_{xx}(\bar{t}, \bar{x}) \leqq u_{xx}(\bar{t}, \bar{x})$. Setzt man diese Relationen in $Pv < 0$ und $Pu = 0$ ein, so findet man wegen der Monotonie von f hinsichtlich der letzten Veränderlichen: $v_t(\bar{t}, \bar{x}) < f(\bar{t}, \bar{x}, v, v_x, v_{xx}) \leqq f(\bar{t}, \bar{x}, u, u_x, u_{xx}) = u_t(\bar{t}, \bar{x})$ in Widerspruch zu (9). Also könnte höchstens noch $(\bar{t}, \bar{x}) \in \Gamma_x$ sein.

Angenommen, es sei $(\bar{t}, \bar{x}) = P \in \Gamma_x$ und der zu diesem Punkt P gehörende Vektor sei $q = (q_1, \ldots, q_l)$. Dann gilt wegen (7) dort $v_{x_\mu} = u_{x_\mu}$ für $\mu = l+1, \ldots, m$ und $v_{xx} = u_{xx}$. Ferner ist $v_{x_\lambda} \leqq u_{x_\lambda}$ für alle $\lambda = 1, \ldots, m$, für die $q_\lambda > 0$ ist, und $v_{x_\lambda} \geqq u_{x_\lambda}$ für alle $\lambda = 1, \ldots, m$, für die $q_\lambda < 0$ ist. Setzt man diese Ungleichungen in $Pv < 0$ und $Pu = 0$ ein, so findet man wegen der vorausgesetzten Monotonie-

Eigenschaft von $f(t, x, z, p, r)$ hinsichtlich der Veränderlichen r und der ersten Veränderlichen p an der Stelle $P=(\bar{t}, \bar{x})$: $v_t<f(\bar{t}, \bar{x}, v, v_x, v_{xx}) \leqq f(\bar{t}, \bar{x}, u, v_x, u_{xx})=f(\bar{t}, \bar{x}, u, v_{x_1}, \ldots, v_{x_l}, u_{x_{l+1}}, \ldots, u_{x_m}, u_{xx}) \leqq f(\bar{t}, \bar{x}, u, u_x, u_{xx})=u$ in Widerspruch zu (9). Aus diesem letzten Widerspruch folgt die Unhaltbarkeit der eingangs getroffenen Annahme, also ist die linke Seite von (6) richtig. Die rechte Seite wird genau so bewiesen.

4. Erweiterungen der Voraussetzungen.

ZUSATZ 1. *Ist $m-l=1$, d.h. tritt nur eine einzige zweite Ableitung $u_{x_m x_m}$ auf (wie z.B. in der Gl. (4)), dann genügt offenbar schon die Existenz von $u_{x_m x_m}$. Die Stetigkeit von $u_{x_m x_m}$ braucht dann bei der Definition der Funktionenklasse Z nicht mehr vorgeschrieben zu werden.*

ZUSATZ 2. *Offenbar kann das Lemma von Nr. 3 verschärft werden zu der folgenden Aussage: Es seien $u, v \in Z$ zwei zulässige Funktionen mit der Eigenschaft*

$$R' v < R' u \quad \text{auf } \Gamma'.$$

Außerdem gelte noch

$$R_\nu v > R_\nu u$$

an denjenigen Stellen $(t', x') \in \Gamma_\nu$, an denen $v=u$ und $v_\nu=u_\nu$ ist. Ferner sei

$$P v < P u$$

mindestens an denjenigen Stellen $(t', x') \in G+\Gamma_1+\Gamma_x$, an denen $v=u$, $v_t \geqq u_t$, $v_{xx} \leqq u_{xx}$ ist und für die weiter $v_x=u_x$ auf $G+\Gamma_1$ und sign $q_\lambda(v_{x\lambda}-u_{x\lambda}) \leqq 0$ *für $\lambda=1, \ldots, l$, aber $v_{x_\mu}=u_{x_\mu}$ für $\mu=l+1, \ldots, m$ ist.*

Dann gilt sogar $v<u$ auf ganz B.

Der zweite Zusatz wird im folgenden jedoch nicht benutzt werden.

UNBESCHRÄNKTER GRUNDBEREICH. Ist das Gebiet G nicht beschränkt, so kann man G durch eine topologische Abbildung $t=t(t^*, x^*)$, $x=x(t^*, x^*)$ auf einen beschränkten Bereich G^* des (t^*, x^*)-Raumes abbilden (vgl. dazu [2], S. 6/7) und die obigen Überlegungen bezüglich G^* durchführen. Damit ist dieser Fall auf den früheren zurückgeführt; man kann jetzt die Ränder Γ', Γ_1, Γ_ν und Γ_x einführen, auch wenn sie unendlich ferne Punkte enthalten, und kann auch die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von u in diesen Punkten erklären, indem man die Funktion $u^*(t^*, x^*)=u\big(t(t^*, x^*), x(t^*, x^*)\big)$ in diesen Randpunkten betrachtet. Es ist nur zu beachten, daß jetzt Begriffe wie „Stetigkeit auf B", „Randwerte auf Γ" usw., einerseits von der benutzten Abbildung abhängen und andererseits gegenüber dem sonst üblichen Gebrauch abgeändert sind.

Es ist wesentlich, daß beim Übergang von G auf G^* weder die Differentialgleichung (3) noch die betrachteten Randbedingungen in $A\,R$ mittransformiert zu werden brauchen. Diese Tatsache ist für die Anwendungen oftmals sehr nützlich und wird auch beim folgenden Eindeutigkeitssatz für instationäre Grenzschichten die Betrachtungen vereinfachen.

5. Das Eindeutigkeitsprinzip *(vgl. dazu [2], S. 13). Zu jeder Lösung $u \in Z$ von AR gebe es eine Folge von „approximierenden" Ober-Funktionen (oder Unter-Funktionen) $v_k \in O(U)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ mit $v_k(t, x) \to u(t, x)$ in $G + \Gamma_1 + \Gamma_x$ für $k \to \infty$.*

Dann hat AR höchstens eine Lösung $u \in Z$.

Der Beweis verläuft wörtlich wie in [2], S. 13.

Mit Hilfe dieses Kriteriums soll nun der angekündigte Eindeutigkeitssatz in Nr. 8 bewiesen werden. Zuvor sind jedoch die Voraussetzungen zu präzisieren, die an die Lösungsfunktionen u und v von (1) und an die in (2) auftretenden Randwerte $\hat{u}, \hat{v}, \tilde{u}, u_0, v_0$ und U zu stellen sind. Außerdem ist noch die angekündigte Transformation nach v. Mises durchzuführen. Das soll in den folgenden Nrn. 6 und 7 geschehen.

6. Voraussetzungen. Bei dem Differentialgleichungssystem (1) ist $m = 2$ und $l = 1$, die drei unabhängigen Veränderlichen sind statt mit t, x_1, x_2 dem physikalischen Brauche folgend mit t, x, y bezeichnet. Nach (2) ist das Grundgebiet G durch $\{0 < t < T,\ x_0(t) < x < x_1,\ 0 < y < \infty\}$ erklärt, dabei sei $x_0(t)$ in $0 \leqq t \leqq T$ definiert. Die Randmenge Γ_v ist leer, es ist Γ_1: $\{t = T,\ x_0(T) < x < x_1,\ 0 < y < \infty\}$ und Γ_x: $\{0 < t \leqq T,\ x = x_1,\ 0 < y < \infty\}$. G ist unbeschränkt bezüglich y, zur Definition der abgeschlossenen Hülle B und des Randes $\Gamma \equiv \Gamma'$ benutzt man die topologische Abbildung

$$t = t^*, \quad x = x^*, \quad y = \frac{y^*}{1 - y^*} \tag{10}$$

mit der Umkehrung $t^* = t$, $x^* = x$, $y^* = \frac{y}{1 + y}$. Die Transformation (10) ist offenbar von der in Nr. 4 betrachteten Art. Sie bildet G umkehrbar eindeutig ab auf das beschränkte Gebiet G^* mit der abgeschlossenen Hülle B^*: $\{0 \leqq t^* \leqq T,\ x_0(t) \leqq x^* \leqq x_1,\ 0 \leqq y^* \leqq 1\}$. Die Randmenge Γ^* ist dann durch $\{t^* = 0,\ x_0(0) \leqq x \leqq x_1,\ 0 \leqq y^* \leqq 1\} + \{0 \leqq t^* \leqq T,\ x^* = x_0(t), 0 \leqq y^* \leqq 1\} + \{0 \leqq t^* \leqq T,\ x_0(t) \leqq x^* \leqq x_1,\ y^* = 0, 1\}$ erklärt.

Für die Randfunktionen $U(t, x)$, $u_0(t, x)$, $v_0(t, x)$, $\tilde{u}(t, y)$, $\hat{u}(x, y)$ und $\hat{v}(x, y)$ gelte[3])

a) Auf $0 \leqq t \leqq T$, $x_0(t) \leqq x \leqq x_1$ seien die Funktionen $U \geqq 0$, $u_0 \geqq 0$, v_0 einschließlich der Ableitungen U_x und u_{0x} stetig, U_t und u_{0t} seien dort beschränkt.

b) In $0 \leqq t \leqq T$, $0 \leqq y < \infty$ seien $\tilde{u} \geqq 0$ und $\tilde{u}_y$ stetig, $\tilde{u}_t$ und $\tilde{u}_{yy}$ seien dort beschränkt, ferner gelte $\tilde{u} > 0$ für $0 \leqq t < T$, $0 < y < \infty$.

In $0 \leqq t \leqq T$, $0 \leqq s \leqq 1$ sei sogar $\tilde{u}\left(x, \frac{s}{1 - s}\right)$ stetig.

c) In $x_0(0) \leqq x \leqq x_1$, $0 \leqq y < \infty$ seien $\hat{u} \geqq 0$, $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$ und $\hat{v}$ stetig, $\hat{u}_{yy}$ und $\hat{v}_y$ seien dort beschränkt, ferner gelte $\hat{u} > 0$ in $x_0(0) \leqq x < x_1$, $0 < y < \infty$.

In $x_0(0) \leqq x \leqq x_1$, $0 \leqq s \leqq 1$ sei sogar $\hat{u}\left(x, \frac{s}{1 - s}\right)$ stetig.

[3]) Aus Gründen einer einfachen Formulierbarkeit sind die folgenden Voraussetzungen nicht das mögliche Optimum, vielmehr könnte manche dieser Forderungen noch gemildert werden.

d) In $0 \leqq t \leqq T$, $x_0(t) \leqq x \leqq x_1$, $0 \leqq y < \infty$ seien noch die folgenden Verträglichkeitsbedingungen erfüllt:

$$\tilde{u}(t, 0) = u_0\big(t, x_0(t)\big), \quad \lim_{s \to 1} \tilde{u}\Big(t, \frac{s}{1-s}\Big) = U\big(t, x_0(t)\big),$$

$$\hat{u}(x, 0) = u_0(0, x), \quad \hat{v}(x, 0) = v_0(0, x),$$

$$\lim_{s \to 1} \hat{u}\Big(x, \frac{s}{1-s}\Big) = U(0, x), \quad \hat{u}\big(x_0(0), y\big) = \tilde{u}(0, y), \quad \hat{u}_x + \hat{v}_y = 0.$$

Anstatt ein Funktionenpaar $u(t, x, y)$, $v(t, x, y)$ als Lösung des Differentialgleichungssystems (1) unter den Randbedingungen (2) zu betrachten, soll im folgenden $v(t, x, y)$ nach den Gln. (1b) und (2c) nur noch als Abkürzung für den Ausdruck

$$v(t, x, y) = v_0(t, x) - \int_0^y u_x(t, x, s)\, ds \tag{11}$$

stehen und damit $u(t, x, y)$ allein als „Lösung" des Anfangs-Randwertproblems (1), (2) aufgefaßt werden.

Eine Funktion $u(t, x, y)$ werde nun dann als Lösung von (1), (2) bezeichnet, wenn gilt: $u(t, x, y)$ sei für $0 \leqq t \leqq T$, $x_0(t) \leqq x \leqq x_1$, $0 \leqq y < \infty$ erklärt und $u\Big(t, x, \frac{s}{1-s}\Big)$ sei auf B^* noch stetig. Die partiellen Ableitungen u_t, u_x, u_y, u_{yy} seien in $G + \Gamma_1 + \Gamma_x$ erklärt, dabei seien u_x und u_y in $0 \leqq t \leqq T$, $x_0(t) \leqq x \leqq x_1$, $0 \leqq y < \infty$ sogar noch stetig, u_t und u_{yy} seien dort beschränkt. In $0 \leqq t < T$, $x_0(t) \leqq x < x_1$, $0 < y < \infty$ sei stets $u > 0$, auf $0 \leqq t < T$, $x_0(t) \leqq x < x_1$ gelte entweder $u(t, x, 0) = u_0(t, x) > 0$ oder $u_y(t, x, 0) > 0$. Die Funktion $u(t, x, y)$ genüge zusammen mit der durch (11) definierten Funktion v dem Differentialgleichungssystem (1) und erfülle die Anfangs- und Randbedingungen (2), wobei (2, d) als

$$\lim_{s \to 1-0} u\Big(t, x, \frac{s}{1-s}\Big) = U(t, x) \tag{12}$$

aufgefaßt werden soll. Die Gesamtheit dieser Lösungsfunktionen sei mit L bezeichnet.

7. Die v. Misessche Transformation. Entsprechend zu der Transformation von R. v. MISES [7] für den stationären Fall sollen auch hier für die Funktionen $u \in L$ neue Koordinaten eingeführt werden durch

$$\begin{cases} \tau(t) = t, \\ \xi(x) = x, \\ \eta(t, x, y) = \eta_0(t, x) + \int_0^y u(t, x, s)\, ds \\ \text{mit } \eta_0(t, x) = -\int_{x_0}^x v_0(t, s)\, ds. \end{cases} \tag{13}$$

Dadurch wird das Gebiet G übergeführt in $\overline{G}$: $\{0<\tau<T,\ x_0(\tau)<\xi<x_1,\ \eta_0(\tau,\xi)<\eta<\infty\}$[4]). Führt man (10) und (13) hintereinander aus, dann ergibt sich eine topologische Abbildung des unbeschränkten Gebietes $\overline{G}$ auf das beschränkte Gebiet G^*. Durch diese Abbildung werden den Rändern Γ^*, Γ_1^* und Γ_x^* Randmengen $\overline{\Gamma}$, $\overline{\Gamma}_1$ und $\overline{\Gamma}_x$ zugeordnet, die zum Teil unendlich ferne Punkte mitenthalten; es ist damit möglich, von der Stetigkeit einer Funktion auf $\overline{B}=\overline{G}+\overline{\Gamma}+\overline{\Gamma}_1+\overline{\Gamma}_x$ zu sprechen. In diesem Sinne ist dann $\overline{\Gamma}$: $\{\tau=0,\ x_0(0)\leqq\xi\leqq x_1,\ \eta_0(0,\xi)\leqq\eta\leqq\infty\}+\{0\leqq\tau\leqq T,\ x_0(\tau)\leqq\xi\leqq x_1,\ \eta=\eta_0(\tau,\xi),\ \eta=\infty\}+\{0\leqq\tau\leqq T,\ \xi=x_0(\tau),\ \eta_0(\tau,\xi)\leqq\eta\leqq\infty\}$ aufzufassen, während $\overline{\Gamma}_1$: $\{\tau=T,\ x_0(T)<\xi<x_1,\ \eta_0(T,\xi)<\eta<\infty\}$ und $\overline{\Gamma}_x$: $\{0<\tau\leqq T,\ \xi=x_1,\ \eta_0(\tau,x_1)<\eta<\infty\}$ keine unendlich fernen Punkte enthalten.

Da in G die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(\tau,\xi,\eta)}{\partial(t,x,y)}=u>0$ ist und da (13) von sehr spezieller Gestalt ist, kann diese Transformation sogar im Großen eindeutig umgekehrt werden. Die Umkehrfunktionen mögen mit $\bar{t}(\tau)$, $\bar{x}(\xi)$, $\bar{y}(\tau,\xi,\eta)$ bezeichnet werden. Ist $u\in L$, dann setzt man

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} w(\tau,\xi,\eta)=u\big(\bar{t}(\tau),\bar{x}(\xi),\bar{y}(\tau,\xi,\eta)\big) \\ \text{und} \\ W(\tau,\xi)=U\big(\bar{t}(\tau),\bar{x}(\xi)\big). \end{array}\right.$$

Die Funktion w ist offenbar stetig auf $\overline{B}$. Weiter existieren die partiellen Ableitungen w_τ, w_ξ, w_η und $w_{\eta\eta}$ in $\overline{G}+\overline{\Gamma}_1+\overline{\Gamma}_x$. Wegen $m-l=1$ ist dann nach dem Zusatz 1 von Nr. 4 für $u\in L$ die Funktion $w(\tau,\xi,\eta)$ zulässig, d.h. es ist $w\in Z$. Weiter gelten die Umrechnungsformeln

$$(15)\qquad u_t=w_\tau,\qquad u\,u_x+v\,u_y=w\,w_\xi,\qquad u_y=w\,w_\eta,\quad u_{yy}=w\,(w\,w_{\eta\eta}+w_\eta^2).$$

Damit geht das Differentialgleichungssystem (1) über in die partielle explizite parabolische Differentialgleichung

$$(16)\qquad Pw\equiv w_\tau-f(\tau,\xi,w,w_\xi,w_\eta,w_{\eta\eta})=0$$

mit

$$(17)\qquad f=\nu\,w\,(w\,w_{\eta\eta}+w_\eta^2)-w\,w_\xi+W_\tau+W\,W_\xi.$$

Da f wegen $\nu>0$ in der Veränderlichen $w_{\eta\eta}$ schwach monoton wächst, ist (16) von der in Nr. 3 untersuchten Gestalt. Aus den Anfangs- und Randbedingungen (2) ergeben sich bei der v. Misesschen Transformation Anfangs- und Randwerte für w, und zwar sind die Funktionswerte von w auf den Randflächen $\overline{\Gamma}$ von $\overline{B}$ vorgeschrieben. Auf den beiden Randebenen $\overline{\Gamma}_1$ und $\overline{\Gamma}_x$ werden dagegen keine Randwerte gefordert. Da in (17) kein Glied mit $w_{\xi\xi}$ auftritt und auf $\xi=x_1$ stets $\frac{\partial f}{\partial w_\xi}=-w\leqq 0$ bleibt, ist das zulässig, und das verallgemeinerte Nagumo-Westphalsche Lemma von Nr. 3 kann auf (16) angewendet werden.

[4]) Wegen der Stetigkeit von $u\left(t,x,\frac{s}{1-s}\right)$ und wegen (11) ist offenbar $\lim\limits_{y\to\infty}\eta(t,x,y)=\infty$.

8. Einzigkeitsbeweis. Angenommen, das Differentialgleichungssystem (1) hätte unter den Randbedingungen (2) zwei verschiedene Lösungen $u_1 \in L$ und $u_2 \in L$. Wegen der eindeutigen Umkehrbarkeit und der speziellen Gestalt von (13) hätte dann auch (16) zwei verschiedene Lösungen $w_1 = u_1\big(\bar{t}(\tau),\ \bar{x}(\xi),\ \bar{y}_1(\tau,\xi,\eta)\big)$ und $w_2 = u_2\big(\bar{t}(\tau),\ \bar{x}(\xi),\ \bar{y}_2(\tau,\xi,\eta)\big)$ [da die Transformation (13) noch von u_1 bzw. u_2 abhängt, ergeben sich zwei verschiedene Umkehrfunktionen $\bar{y}_1$ und $\bar{y}_2$]. Es genügt also, nachzuweisen, daß (16) höchstens eine Lösung $w \in Z$ besitzt. Das soll mit dem Einzigkeitsprinzip von Nr. 5 geschehen. Der folgende Beweis entspricht ungefähr dem Vorgehen beim stationären Fall (d.h. für $u_t \equiv 0$), man vgl. dazu [2], S. 26—28.

Es soll gezeigt werden, daß es zu jeder Lösung $w \in Z$ von (16) mit auf $\bar{\Gamma}$ vorgeschriebenen Randwerten eine Folge von approximierenden Oberfunktionen $z_n(\tau,\xi,\eta)$ gibt, für die also gilt:

(18) $$z_n > w \quad \text{auf} \quad \bar{\Gamma},$$

(19) $$\lim_{n\to\infty} z_n = w \quad \text{auf} \quad \bar{G} + \bar{\Gamma}_1 + \bar{\Gamma}_x,$$

und

(20) $$P z_n > 0 \quad \text{auf} \quad \bar{G} + \bar{\Gamma}_1 + \bar{\Gamma}_x.$$

Es wird sich ergeben, daß schon die Funktionenfolge

(21) $$z_n = w + \frac{1}{n} e^{\alpha t}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

die Eigenschaften (18) bis (20) besitzt, wenn über die vorläufig noch freie Konstante α passend verfügt wird. Der Ansatz (21) erfüllt offenbar nach Konstruktion die Bedingungen (18) und (19), es bleibt also nur noch (20) nachzuprüfen.

Setzt man (21) in (16) ein, so ergibt sich

(22) $$P z_n = P w + \frac{1}{n} e^{\alpha t} A w$$

mit

$$A w = \alpha + w_\xi - \nu \left[\left(2w + \frac{1}{n} e^{\alpha t}\right) w_{\eta\eta} + w_\eta^2\right].$$

Macht man die v. Misessche Transformation (10) wieder rückgängig, so findet man $A w = \alpha + B u$ mit

$$B u = \frac{1}{u}\left[U_t + U U_x - u_t + \nu u_{yy}\right] - \frac{\nu}{u^3}\left[\left(2u + \frac{1}{n} e^{\alpha t}\right) u u_{yy} - \left(u + \frac{1}{n} e^{\alpha t}\right) u_y^2\right].$$

Wegen der Beschränktheit der Funktionen u_t, u_{yy}, U, U_t, U_x gibt es dann Konstanten E und K derart, daß auf ganz B eine Abschätzung

$$B u \geqq \frac{E}{u} + \frac{K}{u^2} + \frac{\nu}{n} e^{\alpha t} \frac{u_y^2}{u^3} \equiv C u$$

gilt.

Es soll gezeigt werden, daß $C u$ gleichmäßig nach unten beschränkt ist. Da nach den Voraussetzungen über $u \in L$ die Möglichkeit $u(t, x_1, 0) = u_y(t, x_1, 0) = 0$

und $u(T, x, 0) = u_y(T, x, 0) = 0$ nicht ausgeschlossen ist, läßt sich diese Behauptung nicht auf ganz B, sondern nur auf einem Teilbereich B_2 zeigen. Es seien x_2 und T_2 zwei Zahlen mit der Eigenschaft $\sup_{0 \leq t \leq T} x_0(t) < x_2 < x_1$ und $0 < T_2 < T$. Dann enthalte B_2 diejenigen Punkte von B, für die $x \leqq x_2$ und $t \leqq T_2$ ist.

Wäre nun Cu auf B_2 nicht gleichmäßig nach unten beschränkt, dann gäbe es eine Punktfolge (t_k, x_k, y_k) derart, daß die Folge $Cu(t_k, x_k, y_k) \to -\infty$ strebt. Wegen $\lim_{y \to \infty} u = U > 0$ bleibt die Folge der y_k sicher beschränkt. Also gibt es eine konvergente Teilfolge $(t_{k_l}, x_{k_l}, y_{k_l}) \to (\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$. Wäre $\bar{y} > 0$ dann wäre auch $u(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}) > 0$, mithin bliebe Cu beschränkt. Also ist $\bar{y} = 0$ und $u(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}) = 0$, und nach der Konstruktion von B_2 ist dann auch $u_y(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}) > 0$. Wegen der Stetigkeit von u_y ist dann auch $u_y > 0$ in einer ganzen Umgebung von $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$. Wegen der speziellen Gestalt von Cu wäre dann aber $\lim_{y \to 0} Cu(\bar{t}, \bar{x}, y) = +\infty$ im Gegensatz zur oben getroffenen Annahme. Mithin gibt es eine Konstante β derart, daß $Bu \geqq Cu \geqq \beta$ ist auf ganz B_2. Setzt man dann $\alpha > -\beta$, dann gilt die Abschätzung $Aw > 0$ und mithin ist in (22) stets $Pz_n > Pw$.

Damit sind also die Funktionen z_n auf B_2 approximierende Oberfunktionen. Nach dem Einzigkeitsprinzip von Nr. 5 und den einleitenden Überlegungen hat daher das Anfangs-Randwertproblem (1), (2) auf B_2 höchstens eine einzige Lösung aus der Klasse L. Dieses Ergebnis ist richtig für jeden Teilbereich $B_2 < B$, mithin gilt es auch noch für $x_2 \to x_1$ und $T_2 \to T$, d.h. auf ganz B und das war gerade die Behauptung.

9. Eine Folgerung aus dem Einzigkeitssatz.

Zusatz zum Einzigkeitssatz. *Es sei $\hat{G} < G$ eine offene Untermenge von G mit den wie oben gebildeten Rändern $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Gamma}_1$ und $\hat{\Gamma}_x$. Es sei $\bar{u} \in L$.*

Dann hat das Anfangs-Randwertproblem (1) *unter den Randwerten $u = \bar{u}$ auf $\hat{\Gamma}$ höchstens eine Lösung $u \in L$.*

Der Beweis des Einzigkeitssatzes der Nr. 8 gilt auch für diesen etwas allgemeineren Sachverhalt.

In dem allgemeinen Lemma von Nr. 3 müssen in den Ungleichungen (5) die echten Ungleichheitszeichen stehen. Wird nämlich darin noch Gleichheit zugelassen, dann ist die Aussage (6) im allgemeinen falsch, selbst wenn man darin $<$ durch $\leqq$ ersetzt. Insbesondere ist es also nicht möglich, für zwei Lösungen u und $\bar{u}$ von (3) eine Abschätzung $u \leqq \bar{u}$ auf B zu folgern allein aus der Tatsache, daß sie auf dem Rand Γ gültig ist. Für die spezielle Differentialgleichung (16), (17) läßt sich diese Verschärfung des Nagumo-Westphalschen Lemmas jedoch leicht aus dem obenstehenden Zusatz zum Einzigkeitssatz folgern:

Satz. *Es sei $u \in L$; die Funktion $\bar{u}$ genüge den Voraussetzungen der Klasse L bis auf die Randwertforderungen, dafür gelte $u \leqq \bar{u}$ auf Γ. Dann ist auch auf ganz B stets*

(23) $$u \leqq \bar{u}.$$

BEWEIS. Angenommen, (23) sei falsch. Dann gibt es ein größtes offenes Teilgebiet $\hat{G} < G$, in dem $u > \bar{u}$ ist. Auf dem wie oben gebildeten Rand $\hat{\Gamma}$ von $\hat{G}$ ist dann $u = \bar{u}$. Nach dem obigen Zusatz zum Einzigkeitssatz ist dann in $\hat{G}$ sogar $u \equiv \bar{u}$ im Gegensatz zur Annahme, womit (23) vollständig bewiesen ist

Eine einfache Anwendung dieses Satzes ist die folgende[5]: Offenbar ist $U(t, x)$ eine Lösung von (1). U genügt den Voraussetzungen, die in dem Satz an die Funktion $\bar{u}$ gestellt werden, wenn auf Γ stets $u \leqq U$ bleibt. Also gilt der

SATZ. *Ist auf Γ stets $u(t, x, y) \leqq U(t, x)$, so gilt diese Ungleichung auch noch auf ganz B, wenn nur $u \in L$ ist.*

Literatur

[1] SCHLICHTING, H.: Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe 1951.

[2] NICKEL, K.: Einige Eigenschaften von Lösungen der Prandtlschen Grenzschicht-Differentialgleichungen. Arch. rational Mech. Anal. **2**, 1—31 (1958).

[3] NAGUMO, M.: Note in Kansū-Hōteisiki No. 15 (1939) [in Japanisch].

[4] WESTPHAL, H.: Zur Abschätzung der Lösungen nichtlinearer parabolischer Differentialgleichungen. Math. Z. **51**, 690—695 (1949).

[5] NAGUMO, M.: Über die Ungleichung $\frac{\partial u}{\partial y} > f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$. Jap. J. Math. **15**, 51—56 (1938).

[6] SZARSKI, J.: Systèmes d'inégalités différentielles aux derivées partielles du premier ordre, et leurs applications. Ann. Pol. Math. **1**, 149—165 (1954).

[7] v. MISES, R.: Bemerkungen zur Hydrodynamik. Z. angew. Math. Mech. **7**, 425—431 (1927).

[8] VELTE, W.: Eine Anwendung des Nirenbergschen Maximumprinzips für parabolische Differentialgleichungen in der Grenzschichttheorie. Arch. rational Mech. Anal. **4**, 420—431 (1960).

[9] NIRENBERG, L.: A strong maximum principle for parabolic equations. Comm. Pure Appl. Math. **6**, 167—177 (1953).

[5]) *Zusatz bei der Korrektur:* Weitere Aussagen ähnlicher Art findet man in einer soeben erschienen Arbeit von W. VELTE [8]. Als hauptsächliches Beweishilfsmittel wird dort das Maximumprinzip von L. NIRENBERG [9] für lineare parabolische Differentialoperatoren verwendet, das sich in der hier benötigten Form als Sonderfall aus dem Nagumo-Westphalschen Lemma gewinnen läßt.

Institut für Angewandte Mathematik der Technischen Hochschule Karlsruhe

(Eingegangen am 12. Januar 1960)

Meyer-König, W., u. K. Zeller
Math. Zeitschr. 74, 221–231 (1960)

Ein high-indices-Theorem für Dirichletsche Reihen

Herrn E. Kamke zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von
W. Meyer-König und K. Zeller

1. Formulierung des Satzes. Der Index n durchlaufe, wenn nichts anderes gesagt ist, die Folge $0, 1, \ldots$. Für jede auftretende Folge $\{\lambda_n\}$ gelte $0 \leqq \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$ und $\lambda_n \to \infty$.

Gegeben sei die Dirichlet-Reihe $\sum_n u_n e^{-\lambda_n z}$. Ihre Konvergenzabszisse sei mit σ, ihre Summe in der Konvergenzhalbebene mit $u(z)$ bezeichnet:

$$u(z) = \sum_n u_n e^{-\lambda_n z} \qquad (\Re z > \sigma). \tag{1.1}$$

Das nachstehend als Satz 1 formulierte *high-indices-Theorem* wurde 1910 von Littlewood vermutet, 1926 von Hardy und Littlewood bewiesen (vgl. Hardy [1949], S. 172; Zeller [1958], S. 122, IV).

Satz 1. *Für die Dirichlet-Reihe* (1.1) *sei* $\sigma = 0$, *ferner strebe*

$$u(x) \to s \quad \textit{für} \quad x \to 0+ \qquad (x \text{ reell}). \tag{1.2}$$

Ist dann für ein $\vartheta > 0$ *die Lückenbedingung*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqq \vartheta \lambda_n \tag{1.3}$$

erfüllt, so ist $\sum_n u_n$ *konvergent zur Summe* s.

Das Ziel dieser Note ist der folgende Satz 2, der aus Satz 1 entsteht, indem wir (1.2) verstärken zu (1.4), (1.3) abschwächen zu (1.5).

Satz 2. *Für die Dirichlet-Reihe* (1.1) *sei* $\sigma = 0$, *ferner sei*

$$\sum_n c_n (-a)^n = s, \tag{1.4}$$

wo a *eine positive Konstante und* $\sum_n c_n (z-a)^n$ *die Taylor-Entwicklung von* $u(z)$ *nach Potenzen von* $z-a$ *ist. Ist dann für ein* $\vartheta > 0$ *die Lückenbedingung*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqq \vartheta \sqrt{\lambda_n} \tag{1.5}$$

erfüllt, so ist $\sum_n u_n$ *konvergent zur Summe* s.

Zum Beweis des Satzes 2 benützen wir, mit einer Ergänzung, die in Meyer-König und Zeller [1956] zum Beweis von Lückenumkehrsätzen entwickelte funktionalanalytische Methode.

2. Verallgemeinerung. Zunächst sei Satz 2 noch verallgemeinert. Es gilt

Satz 3. *a sei eine positive Konstante und für die Dirichlet-Reihe* (1.1) *sei* $0 \leqq \sigma \leqq a$. *Ferner sei* $u(z)$ *regulär an der Stelle* $z=a$ *und* $\sum_n c_n(-a)^n = s$, *wo* $\sum_n c_n(z-a)^n$ *die Taylor-Entwicklung von* $u(z)$ *nach Potenzen von* $z-a$ *ist. Ist dann die Lückenbedingung* (1.5) *erfüllt, so ist* $\sum_n u_n$ *konvergent zur Summe* s.

Die Voraussetzung, daß $u(z)$ regulär an der Stelle $z=a$ ist, geht über das schon vorher Geforderte natürlich nur dann hinaus, wenn $\sigma = a$ ist.

Satz 2 ist ein Spezialfall von Satz 3. Andererseits folgt Satz 3 aus Satz 2, wenn wir einen Nichtfortsetzbarkeitssatz von CARLSON und LANDAU [1921] zu Hilfe nehmen. Aus (1.5) folgt nämlich $\lambda_{n+1} - \lambda_n \to \infty$ und daraus in bekannter Weise $\frac{\lambda_n}{n} \to \infty$. (Ist $c>0$, so ist $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqq c$ für genügend großes n, also $\lambda_n \geqq cn + O(1)$ und somit $\underline{\lim}_n \frac{\lambda_n}{n} \geqq c$; dies gilt für jedes $c>0$.) Sind daher die Voraussetzungen des Satzes 3 samt (1.5) erfüllt, so ist $u(z)$ nach dem genannten Satz von CARLSON und LANDAU nicht über die Halbebene $\Re z > \sigma$ hinaus analytisch fortsetzbar; da aber $u(z)$ in $|z-a|<a$ regulär ist, ist notwendig $\sigma = 0$, und die Behauptung von Satz 3 folgt aus Satz 2.

Der unten dargestellte Beweis des Satzes 2 ließe sich unschwer zu einem direkten, den Nichtfortsetzbarkeitssatz vermeidenden Beweis des Satzes 3 ausgestalten. Jedoch begnügen wir uns hier mit der angegebenen Zurückführung von Satz 3 auf Satz 2.

Satz 3 läßt sich als ein Limitierungsumkehrsatz auffassen, wie wir jetzt darlegen wollen. Sind die Folge $\lambda = \{\lambda_n\}$ und die Konstante $a>0$ gegeben, so heiße die Reihe $\sum_n u_n$ $V_{\lambda,a}$-summierbar zum Wert s, wenn die Dirichlet-Reihe $\sum_n u_n e^{-\lambda_n z}$ (mindestens) für $\Re z > a$ konvergiert, ihre dort erklärte Summe $u(z)$ an der Stelle $z=a$ regulär ist und die Taylor-Entwicklung von $u(z)$ nach Potenzen von $z-a$ für $z=0$ zum Wert s konvergiert. Dieses $V_{\lambda,a}$-Verfahren ist permanent. Ist nämlich $\sum_n u_n = s$ und setzen wir

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq \lambda_0 \\ u_0 + \cdots + u_n & \text{für} \quad \lambda_n < t \leqq \lambda_{n+1}, \end{cases} \tag{2.1}$$

so ist

$$\int_0^\infty ds(t) = \sum_n u_n = s, \qquad \int_0^\infty e^{-tz}\, ds(t) = \sum_n u_n e^{-\lambda_n z} \qquad (\Re z > 0);$$

daraus folgt $V_{\lambda,a}\text{-}\sum_n u_n = s$ (vgl. MEYER-KÖNIG [1952], S. 186, Satz 2.6).

Satz 3 läßt nun die folgende Formulierung zu: *Aus* $V_{\lambda,a}\text{-}\sum_n u_n = s$ *und* (1.5) *folgt* $\sum_n u_n = s$. *Für jede Folge* $\{\lambda_n\}$, *die* (1.5) *erfüllt, ist das Verfahren* $V_{\lambda,a}$ *also konvergenzgleich.*

Es bleibt übrig, den Satz 2 zu beweisen. Dies soll im folgenden geschehen. Dabei genügt es, aus den Voraussetzungen auf die Konvergenz von $\sum_n u_n$ zu schließen; die Gleichung $\sum_n u_n = \sum_n c_n (-a)^n$ folgt dann aus der Permanenz des $V_{\lambda,a}$-Verfahrens.

3. Der zugrunde liegende FK-Raum $\mathfrak{F}_a$. Wir machen von der Theorie der FK-Räume Gebrauch (vgl. ZELLER [1958], S. 29). Elemente eines solchen Raumes sind komplexe Zahlenfolgen $\mathfrak{x}=\{x_0, x_1, \ldots\}$, $\mathfrak{u}=\{u_0, u_1, \ldots\}$, ...

In dieser Nummer liege eine feste Exponentenfolge $\{\lambda_n\}$ vor, für die (1.5) erfüllt ist. a sei eine positive Konstante.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{F}^*$ die Menge der $\mathfrak{u}$, für die die zugeordnete Dirichlet-Reihe $u(z)=\sum_n u_n e^{-\lambda_n z}$ (mindestens) für $\Re z>0$ konvergiert. Im folgenden ist zu beachten: *Ist* $\mathfrak{u}\in\mathfrak{F}^*$, *so ist* $\sum_n u_n e^{-\lambda_n z}$ *für* $\Re z>0$ *absolut konvergent.* Ist nämlich $x>0$, so ist wegen $u_n e^{-\lambda_n x/2}\to 0$ und wegen $\lambda_n \geqq n-M$ (M von n unabhängig; vgl. nach Satz 3)

$$\sum_n |u_n|\, e^{-\lambda_n x} \leqq e^{Mx/2} \sum_n |u_n|\, e^{-\lambda_n x/2} e^{-n x/2} < \infty .$$

Für $\mathfrak{u}\in\mathfrak{F}^*$ ist die Taylor-Entwicklung $\sum_n c_n (z-a)^n$ von $u(z)$ nach Potenzen von $z-a$ konvergent für $|z-a|<a$. Hierbei ist

$$c_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n u}{dz^n}\right)_{z=a} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty} u_k (-\lambda_k)^n e^{-\lambda_k a},$$

wobei die angeschriebenen Reihen sicher konvergieren. Wir führen die Matrix A_a mit den Elementen

$$a_{nk} = \frac{a^n}{n!}\lambda_k^n e^{-\lambda_k a} \qquad (n,k=0,1,\ldots) \tag{3.1}$$

ein. Für $\mathfrak{u}\in\mathfrak{F}^*$ existieren die Glieder

$$v_n = \frac{a^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda_k^n e^{-\lambda_k a}$$

der Folge $\mathfrak{v}=A_a\mathfrak{u}$, und es gilt

$$u(z) = \sum_n \frac{v_n}{(-a)^n}(z-a)^n \qquad (|z-a|<a).$$

Mit $\mathfrak{F}_a$ bezeichnen wir die Menge derjenigen $\mathfrak{u}\in\mathfrak{F}^*$, für die (in den bisherigen Bezeichnungen) $\sum_n v_n$ konvergiert. Über $\mathfrak{F}_a$ gilt der

Satz 4. *$\mathfrak{F}_a$ ist ein FK-Raum mit den Halbnormen*

$$p_0(\mathfrak{u}) = \sup_n |v_0 + \cdots + v_n|, \qquad p_j(\mathfrak{u}) = \sum_n |u_n|\, e^{-\lambda_n/j} \qquad (j=1,2,\ldots).$$

Beim Beweis benützen wir die Kriterien 2.1, 2.3 und 2.4 aus ZELLER [1953]. Zunächst stellen wir fest, daß die Menge $\mathfrak{E}^{(1)}$ der $\mathfrak{u}$ mit $p_1(\mathfrak{u})<\infty$ einen FK-Raum mit den Halbnormen $p_1, 0, 0, \ldots$ bildet, der zu dem BK-Raum der absolut konvergenten Reihen isomorph ist (vgl. Kriterium 2.4). Entsprechendes gilt für die Menge $\mathfrak{E}^{(j)}$ der $\mathfrak{u}$ mit $p_j(\mathfrak{u})<\infty$ (j fest; $j=1, 2, \ldots$). Durch Durchschnittsbildung (vgl. Kriterium 2.3) erhalten wir den FK-Raum $\cap\, \mathfrak{E}^{(j)}$ mit den Halbnormen p_j ($j=1, 2, \ldots$). Er enthält genau diejenigen $\mathfrak{u}$, für die $p_j(\mathfrak{u})<\infty$ ist für alle $j=1, 2, \ldots$, d.h. es ist $\cap\, \mathfrak{E}^{(j)}=\mathfrak{F}^*$.

Für jedes feste n ist die Abbildung $\mathfrak{u}\to v_n$ eine stetige Linearform in $\mathfrak{F}^*$ (vgl. ZELLER [1951], S. 471, Satz 4.4). Daraus folgt unschwer, daß $p_0(\mathfrak{u})\leqq\infty$ eine nach unten halbstetige Halbnorm in $\mathfrak{F}^*$ ist. Also ist (vgl. Kriterium 2.1) die Menge aller $\mathfrak{u}\in\mathfrak{F}^*$ mit $p_0(\mathfrak{u})<\infty$ ein FK-Raum $\mathfrak{F}_a^{**}$ mit den Halbnormen $p_0, p_1, \ldots$. Wie man weiter feststellt, bilden diejenigen $\mathfrak{u}\in\mathfrak{F}_a^{**}$, für die $\sum_n v_n$ konvergiert, einen linearen abgeschlossenen Unterraum von $\mathfrak{F}_a^{**}$, also einen FK-Raum mit den Halbnormen von $\mathfrak{F}_a^{**}$. Dies heißt aber, daß $\mathfrak{F}_a$ ein FK-Raum mit den Halbnormen $p_0, p_1, \ldots$ ist.

4. Aufbau des Beweises. Wie in **3** liege die feste, (1.5) erfüllende Folge $\{\lambda_n\}$ vor.

Zu $\mathfrak{F}_a$ gehören die Elemente

$$\mathfrak{e}_0=\{1, 0, 0, \ldots\}, \qquad \mathfrak{e}_1=\{0, 1, 0, \ldots\}, \ldots.$$

Wir bilden ihre lineare abgeschlossene Hülle in $\mathfrak{F}_a$ und bezeichnen diese mit $\mathfrak{F}_a^P$. $\mathfrak{F}_a^P$ ist ein FK-Raum mit den Halbnormen von $\mathfrak{F}_a$, in dem die $\mathfrak{e}_j$ ($j=0, 1, \ldots$) eine Grundmenge bilden.

Der Zahl a ordnen wir die Zahl $b=\frac{a}{2}$ zu. (Statt b würde jedes b_1 mit $0<b_1<a$ dieselben Dienste leisten.) In **6** und **7** werden wir die folgenden beiden Aussagen beweisen:

I. *Aus* $\mathfrak{u}\in\mathfrak{F}_a$ *folgt* $\mathfrak{u}\in\mathfrak{F}_b^P$.

II. *Satz 2 ist richtig, wenn wir zusätzlich voraussetzen, daß* $\sum_n u_n$ *beschränkte Teilsummen hat.*

Aus I und II ergibt sich Satz 2 in folgender Weise. Die Voraussetzungen des Satzes 2 seien erfüllt. Dann gilt $\mathfrak{u}\in\mathfrak{F}_a$. Nach I folgt daraus $\mathfrak{u}\in\mathfrak{F}_b^P$. Nach II gibt es kein $\mathfrak{y}\in\mathfrak{F}_b$, für das $\sum_n y_n$ divergiert und beschränkte Teilsummen hat; erst recht gibt es dann kein solches $\mathfrak{y}\in\mathfrak{F}_b^P$. Wenn aber ein Raum von der Struktur von $\mathfrak{F}_b^P$ keine beschränkt-divergenten Elemente enthält, so überhaupt keine divergenten (vgl. MEYER-KÖNIG und ZELLER [1956], S. 210, Satz 3.1, Teil b); dies bedeutet, daß $\sum_n x_n$ konvergiert für jedes $\mathfrak{x}\in\mathfrak{F}_b^P$. Insbesondere ist also $\sum_n u_n$ konvergent.

5. Ein Hilfssatz. In **6** benötigen wir den

Hilfssatz. *Ist* $\sum_n a_n$ *konvergent,* $f(z)=\sum_n a_n z^n$ *für* $|z|<1$, *und* $f(z)=\sum_n a_n^{(\alpha)}(z-\alpha)^n$ *für* $|z-\alpha|<1-\alpha\left(0<\alpha<\frac{1}{2}\right)$, *so ist* $\sum_n \frac{1}{2^n} a_n^{(\alpha)}$ *gleichmäßig konvergent in* $0<\alpha<\frac{1}{2}$.

Beim Beweis benützen wir die auf der Matrix T_α mit den Elementen

$$b_{nk}=(1-\alpha)^{n+1}\binom{k}{n}\alpha^{k-n} \qquad (n,k=0,1,\ldots)$$

beruhende Taylor-Transformation einer Folge in eine Folge (vgl. HARDY [1949], S. 218; ZELLER [1958], S. 141). Wir setzen

$$\sum_n a_n = s', \qquad s_n^{(0)} = a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots.$$

Die T_α-Transformation $(0<\alpha<\frac{1}{2})$ der Reihe $\sum_n a_n$ mit den Teilsummen $s'-s_n^{(0)}$ ist ebenfalls konvergent zur Summe s', d.h. es ist

$$\sum_n a_n^{(\alpha)}(1-\alpha)^n = s'.$$

Die letzte Reihe hat die Teilsummen $s'-t_n^{(\alpha)}$ mit

$$t_n^{(\alpha)}=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^{(\alpha)}(1-\alpha)^k.$$

Da die Teilsummen $s'-t_n^{(\alpha)}$ durch Anwendung von T_α auf die Teilsummen $s'-s_n^{(0)}$ entstehen, ist

$$t_n^{(\alpha)}=(1-\alpha)^{n+1}\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}\alpha^{k-n}s_n^{(0)}.$$

Daraus ergibt sich

$$|t_n^{(\alpha)}|\leqq \bar{s}_n^{(0)} \quad \text{mit} \quad \bar{s}_n^{(0)}=\operatorname{Max}\left(|s_n^{(0)}|,|s_{n+1}^{(0)}|,\ldots\right). \tag{5.1}$$

Nun bringen wir die Reihenreste

$$s_n^{(\alpha)}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}a_k^{(\alpha)} \qquad \left(0<\alpha<\frac{1}{2}\right)$$

der zu untersuchenden Reihe in Zusammenhang mit den Reihenresten $t_n^{(\alpha)}$. Indem wir

$$s_n^{(\alpha)}=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k^{(\alpha)}(1-\alpha)^k\left(\frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^k$$

schreiben und

$$\bar{t}_n^{(\alpha)}=\operatorname{Max}\left(|t_n^{(\alpha)}|,|t_{n+1}^{(\alpha)}|,\ldots\right)$$

setzen, erhalten wir vermöge partieller Summation die Abschätzung

$$|s_n^{(\alpha)}|\leqq \bar{t}_n^{(\alpha)}\left(\left(\frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{2(1-\alpha)}\right)^{n+1}\right)\leqq 2\bar{t}_n^{(\alpha)}.$$

Nach (5.1) ist die Nullfolge $\overline{s}_n^{(0)}$ nicht zunehmend und

$$\overline{t}_n^{(\alpha)} \leqq \operatorname{Max}(\overline{s}_n^{(0)}, \overline{s}_{n+1}^{(0)}, \ldots) = \overline{s}_n^{(0)}.$$

Damit erhalten wir abschließend

$$|s_n^{(\alpha)}| \leqq 2\,\overline{s}_n^{(0)} \qquad (0 < \alpha < \tfrac{1}{2}),$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

6. Approximation in $\mathfrak{F}_b$. Wir beweisen jetzt die Aussage I aus **4**. Die Zahl $a > 0$, $b = \frac{a}{2}$, die (1.5) erfüllende Folge $\{\lambda_n\}$ und $\mathfrak{u} \in \mathfrak{F}_a$ seien vorgegeben. Wegen der Permanenz der schon in **5** benützten Taylor-Transformation gilt $\mathfrak{u} \in \mathfrak{F}_b$. Heißen wir die Folge $\mathfrak{x}$ abbrechend, wenn höchstens endlich viele x_n von Null verschieden sind, so haben wir zu zeigen: $\mathfrak{u}$ läßt sich in $\mathfrak{F}_b$ durch abbrechende $\mathfrak{x}$ approximieren, d.h. es gibt abbrechende $\mathfrak{x}^{(m)} \in \mathfrak{F}_b$ $(m = 0, 1, \ldots)$ mit $\mathfrak{x}^{(m)} \to \mathfrak{u}$ in $\mathfrak{F}_b$ für $m \to \infty$. Wir unterteilen den Beweis in drei Teile.

Teil 1. Wir zeigen: In $\mathfrak{F}_b$ strebt

$$\{u_0 e^{-\lambda_0 x}, u_1 e^{-\lambda_1 x}, \ldots\} \to \{u_0, u_1, \ldots\} \quad \text{für} \quad x \to 0+ \quad (x \text{ reell}), \tag{6.1}$$

oder also $\mathfrak{u}^{(x)} \to \mathfrak{u}$ für $x \to 0+$, wobei

$$\mathfrak{u}^{(x)} = \{u_0 e^{-\lambda_0 x}, u_1 e^{-\lambda_1 x}, \ldots\} \qquad (x > 0)$$

gesetzt ist. Daß hierbei $\mathfrak{u}^{(x)} \in \mathfrak{F}_b$ ist, sieht man sofort ein, wenn man analog zu $u(z)$ die zu $\mathfrak{u}^{(x)}$ gehörige Funktion

$$u^{(x)}(z) = \sum_n u_n e^{-\lambda_n x} e^{-\lambda_n z} = u(z + x) \qquad (x > 0,\ \Re z > -x)$$

bildet.

Bezüglich der Halbnormen $\mathfrak{p}_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ heißt (6.1), daß

$$\mathfrak{p}_j(\mathfrak{u}^{(x)} - \mathfrak{u}) = \sum_n |u_n| (1 - e^{-\lambda_n x}) e^{-\lambda_n / j} \to 0$$

strebt für $x \to 0+$, was sich aus $\sum_n |u_n| e^{-\lambda_n / j} < \infty$ unmittelbar ergibt. Bezüglich der Halbnorm $\mathfrak{p}_0$ haben wir zu zeigen, daß

$$\mathfrak{p}_0(\mathfrak{u}^{(x)} - \mathfrak{u}) = \sup_n \left| \sum_{k=0}^{n} (v_k^{(x)} - v_k) \right| \to 0$$

strebt für $x \to 0+$, wobei

$$\mathfrak{v} = A_b\,\mathfrak{u}, \qquad \mathfrak{v}^{(x)} = A_b\,\mathfrak{u}^{(x)} \qquad (x > 0)$$

gesetzt ist. Für $m = 0, 1, \ldots$ ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_0(\mathfrak{u}^{(x)} - \mathfrak{u}) &\leqq \sum_{n=0}^{m} |v_n^{(x)} - v_n| + \sup_{n \geqq m+1} \left| \sum_{k=0}^{\infty} (v_k^{(x)} - v_k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} (v_k^{(x)} - v_k) \right| \\ &\leqq \sum_{n=0}^{m} |v_n^{(x)} - v_n| + \left| \sum_{k=0}^{\infty} (v_k^{(x)} - v_k) \right| + \sup_{n \geqq m+1} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k^{(x)} \right| + \sup_{n \geqq m+1} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k \right|. \end{aligned}$$

Die vier zuletzt aufgetretenen, noch von m und x abhängigen Summanden bezeichnen wir der Reihe nach mit $S_1, \ldots, S_4$.

Zwecks Beurteilung von S_3 bemerken wir, das $\sum_n v_n^{(x)}$ in $0<x<b$ gleichmäßig konvergiert. $\sum_n v_n^{(x)}$ entsteht nämlich aus der Taylor-Entwicklung von $u^{(x)}(z)$ nach Potenzen von $z-b$ für $z=0$, oder aus der Taylor-Entwicklung von $u(z)$ nach Potenzen von $z-(b+x)$ für $z=x$. Wegen $\mathfrak{u}\in\mathfrak{H}_a$ ergibt sich die Behauptung nun offenbar aus dem in **5** bewiesenen Hilfssatz.

Ein $\varepsilon>0$ sei vorgegeben. Wegen der soeben getroffenen Feststellung und wegen der Konvergenz von $\sum_n v_n$ können wir die von jetzt an festgehaltene ganze Zahl $m\geqq 0$ so wählen, daß

$$p_0(\mathfrak{u}^{(x)}-\mathfrak{u})<S_1+S_2+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4} \qquad (0<x<b)$$

ist. Wir schätzen weiter $S_1=S_1(x)$ ab. Für $n=0,\ldots,m$ und $0<x<b$ ist

$$v_n=\frac{(-b)^n}{n!}\left(\frac{d^n u}{dz^n}\right)_{z=b}, \qquad v_n^{(x)}=\frac{(-b)^n}{n!}\left(\frac{d^n u}{dz^n}\right)_{z=b+x}.$$

Da die Funktion $\frac{d^n u}{dz^n}$ in der Halbebene $\Re z>0$ regulär, also gewiß an der Stelle $z=b$ stetig ist, gibt es ein $x_1>0$, so daß $0\leqq S_1(x)<\frac{\varepsilon}{4}$ ist für $0<x<x_1$. Schließlich schätzen wir $S_2=S_2(x)$ ab. Einerseits strebt $u(x)\to\sum_n v_n$ für $x\to 0+$; andererseits ist

$$u^{(x)}(z)=\sum_n \frac{v_n^{(x)}}{(-b)^n}(z-b)^n \quad \text{für} \quad |z-b|<b+x \qquad (x>0),$$

also $\sum_n v_n^{(x)}=u^{(x)}(0)=u(x)$ für $x>0$. Somit gibt es ein $x_2>0$, so daß $0\leqq S_2(x)<\frac{\varepsilon}{4}$ ist für $0<x<x_2$. Daher gibt es ein $x_0>0$, so daß $p_0(\mathfrak{u}^{(x)}-\mathfrak{u})<\varepsilon$ ist für $0<x<x_0$. Damit ist (6.1) bewiesen.

Teil 2. Wir halten ein $x>0$ fest und zeigen: In $\mathfrak{H}_b$ strebt

$$\{u_0 e^{-\lambda_0 x}, \ldots, u_n e^{-\lambda_n x}, 0, 0, \ldots\} \to \{u_0 e^{-\lambda_0 x}, u_1 e^{-\lambda_1 x}, \ldots\} \tag{6.2}$$

für $n\to\infty$. Bezüglich der Halbnormen $p_1, p_2, \ldots$ ergibt sich dies unmittelbar. Wir beweisen noch das Nötige bezüglich der Halbnorm p_0. Wir setzen

$$\mathfrak{u}^{(x,n)}=\{0,\ldots 0, u_{n+1}e^{-\lambda_{n+1}x}, u_{n+2}e^{-\lambda_{n+2}x}, \ldots\}$$

und haben zu zeigen, daß $p_0(\mathfrak{u}^{(x,n)})\to 0$ strebt für $n\to\infty$. Natürlich ist $\mathfrak{u}^{(x,n)}\in\mathfrak{H}_b$. Zu $\mathfrak{u}^{(x,n)}$ gehört die Funktion

$$u^{(x,n)}(z)=\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k e^{-\lambda_k(z+x)} \qquad (\Re z>-x)$$

und die Folge

$$\mathfrak{v}^{(x,n)}=A_b\,\mathfrak{u}^{(x,n)}.$$

Ein $\varepsilon>0$ sei vorgegeben. Es gibt dann ein n_0, so daß

$$|u^{(x,n)}(z)| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad |z-b| = b + \frac{x}{2} \quad \text{und} \quad n \geqq n_0$$

gilt. Nun ist

$$u^{(x,n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k^{(x,n)}}{(-b)^k} (z-b)^k \qquad (|z-b| < b+x),$$

nach der Cauchyschen Abschätzungsformel also

$$|v_k^{(x,n)}| \leqq \frac{b^k \varepsilon}{\left(b + \frac{x}{2}\right)^k} \qquad (n \geqq n_0;\ k = 0, 1, \ldots).$$

Damit wird für $n \geqq n_0$

$$p_0(u^{(x,n)}) = \sup_{k=0,1,\ldots} |v_0^{(x,n)} + \cdots + v_k^{(x,n)}| \leqq \sum_{k=0}^{\infty} |v_k^{(x,n)}| \leqq \frac{(2b+x)\varepsilon}{x}.$$

(6.2) ist nun bewiesen.

Teil 3. Aus (6.1) und (6.2) folgt, daß wir u im oben angegebenen Sinn in $\mathfrak{F}_b$ durch abbrechende Folgen approximieren können (vgl. z.B. MEYER-KÖNIG und ZELLER [1956], S. 219 Mitte). Damit ist die Aussage I aus **4** bewiesen.

7. Reihen mit beschränkten Teilsummen. Jetzt ist noch die Aussage II aus **4** zu beweisen, was sich in üblicher Weise erledigen läßt. Die Voraussetzungen des Satzes 2 samt (1.5) seien erfüllt, außerdem besitze $\sum_n u_n$ beschränkte Teilsummen. Wir setzen noch $s=0$.

Wie in (2.1) führen wir die für $t \geqq 0$ erklärte und beschränkte Funktion $s(t)$ ein. Wegen

$$u(z) = \int_0^{\infty} e^{-tz}\, ds(t) \qquad (\Re z > 0)$$

strebt (vgl. MEYER-KÖNIG [1952], S. 185, Satz 2.4; S. 200, Satz 6.2) für jedes feste $c>0$ die Folge

$$t_k = \frac{c^{k+1}}{k!} \int_0^{\infty} t^k e^{-ct} s(t)\, dt = \frac{1}{k!} \int_0^{\infty} t^k e^{-t} s\left(\frac{t}{c}\right) dt \to 0$$

$(k=0, 1, \ldots;\ k \to \infty)$. Wir denken uns ein $c>0$ gewählt, das wir vorläufig festhalten. Wegen der Beschränktheit von $s(t)$ und

$$\frac{1}{k!} \int_0^{k/2} t^k e^{-t}\, dt \to 0, \qquad \frac{1}{k!} \int_{3k/2}^{\infty} t^k e^{-t}\, dt \to 0$$

strebt auch

$$t_k' = \frac{1}{k!} \int_{k/2}^{3k/2} t^k e^{-t} s\left(\frac{t}{c}\right) dt \to 0$$

(jeweils für $k\to\infty$). Es sei von jetzt an $k>0$. Wir setzen

$$t_k'' = \frac{k!\,e^k}{\sqrt{k}\,k^k}\,t_k'$$

und erhalten durch eine einfache Substitution

$$t_k'' = \int_{-\sqrt{k}/2}^{\sqrt{k}/2}\left(1+\frac{t}{\sqrt{k}}\right)^k e^{-t\sqrt{k}}\,s\left(\frac{k+t\sqrt{k}}{c}\right)dt.$$

Wegen $t_k'\to 0$ strebt $t_k''\to 0$ für $k\to\infty$.

Wir machen nun k von n abhängig, indem wir

$$k = k(n) = \left[c\left(\lambda_n + \frac{\vartheta}{2}\sqrt{\lambda_n}\right)\right]$$

setzen. Ferner sei

$$\varrho = \frac{1}{4}\vartheta\sqrt{c}.$$

Es gibt, wie man leicht bestätigt, eine Nummer n_1, so daß

$$\lambda_n \leqq \frac{k-\varrho\sqrt{k}}{c} \leqq \frac{k+\varrho\sqrt{k}}{c} \leqq \lambda_{n+1} \quad \text{für} \quad n\geqq n_1 \tag{7.1}$$

ist. Im folgenden sei $n\geqq n_1$, ferner sei n schon so groß, daß $\varrho<\sqrt{k}/2$, also auch $k>0$, ist. Das Integral in dem Ausdruck für t_k'' zerlegen wir in drei Teile:

$$t_k'' = \int_{-\sqrt{k}/2}^{-\varrho} + \int_{-\varrho}^{\varrho} + \int_{\varrho}^{\sqrt{k}/2} = J_1 + J_2 + J_3. \tag{7.2}$$

Ist $|s(t)|\leqq M$ für $t\geqq 0$, so ist

$$|J_1| \leqq M\int_{-\sqrt{k}/2}^{-\varrho}\left(1+\frac{t}{\sqrt{k}}\right)^k e^{-t\sqrt{k}}\,dt, \qquad |J_3| \leqq M\int_{\varrho}^{\sqrt{k}/2}\left(1+\frac{t}{\sqrt{k}}\right)^k e^{-t\sqrt{k}}\,dt.$$

Für $-\frac{1}{2}\sqrt{k}\leqq t\leqq 0$, d.h. $-\frac{1}{2}\leqq\frac{t}{\sqrt{k}}\leqq 0$, gilt

$$\log\left(1+\frac{t}{\sqrt{k}}\right) \leqq \frac{t}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{k}.$$

Daher ist

$$|J_1| \leqq M\int_{-\sqrt{k}/2}^{-\varrho} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt \leqq M\int_{-\infty}^{-\varrho} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt.$$

Für $0\leqq t\leqq\frac{\sqrt{k}}{2}$, d.h. $0\leqq\frac{t}{\sqrt{k}}\leqq\frac{1}{2}$, gilt

$$\log\left(1+\frac{t}{\sqrt{k}}\right) = \frac{t}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{k} + \frac{\vartheta_1}{3}\frac{t^3}{k\sqrt{k}} \tag{7.3}$$

mit $0<\vartheta_1=\vartheta_1(t)<1$. Daher ist

$$|J_3| \leqq M\int_{\varrho}^{\sqrt{k}/2} e^{-t^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\frac{t}{\sqrt{k}}\right)}dt \leqq M\int_{\varrho}^{\infty} e^{-\frac{1}{3}t^2}\,dt.$$

Wegen (7.1) wird

$$J_2 = s(\lambda_{n+1}) \int_{-\varrho}^{\varrho} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{k}}\right)^k e^{-t\sqrt{k}}\, dt.$$

Für $0 \leqq t \leqq \varrho$ gilt gewiß $0 \leqq \frac{t}{\sqrt{k}} \leqq \frac{1}{2}$, also (vgl. 7.3)

$$\log\left(1 + \frac{t}{\sqrt{k}}\right) \geqq \frac{t}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{k}.$$

Daher ist

$$\int_{-\varrho}^{\varrho} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{k}}\right)^k e^{-t\sqrt{k}}\, dt \geqq \int_{0}^{\varrho} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Aus (7.2) folgt nun

$$|s(\lambda_{n+1})| \int_0^{\varrho} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \leqq |t_k''| + M \int_{-\infty}^{-\varrho} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + M \int_{\varrho}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt,$$

und für $n \to \infty$, was auch $k = k(n) \to \infty$ bedeutet,

$$\left(\overline{\lim_n} |s(\lambda_n)|\right) \int_0^{\varrho} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \leqq M \int_{-\infty}^{-\varrho} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + M \int_{\varrho}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Die letzte Ungleichung gilt für jedes $c > 0$. Indem wir $c \to \infty$, also $\varrho \to \infty$, gehen lassen, erhalten wir $\overline{\lim_n} |s(\lambda_n)| = 0$. Somit ist $\sum_n u_n$ konvergent (zur Summe 0). Damit ist die Aussage II aus **4**, und damit auch Satz 2, bewiesen.

8. Schlußbemerkungen. Die Bedingung (1.5) in Satz 2 läßt sich nicht abschwächen in folgendem Sinn. Ist eine Folge $\{\vartheta_n\}$ gegeben mit $\vartheta_n > 0$ und $\vartheta_n \to 0$, so läßt sich (1.5) nicht ersetzen durch die Forderung $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqq \vartheta_n \sqrt{\lambda_n}$. Der nach üblicher Methode zu führende Nachweis sei hier unterdrückt.

Der in **4**, Aussage I, zum Ausdruck kommende Beweisgedanke ist auch sonst brauchbar. Zum Beispiel läßt sich auf diese Weise das high-indices-Theorem für das Taylor-Verfahren T_α (vgl. MEYER-KÖNIG und ZELLER [1958], S. 49, Satz 6) in dem (a.a.O. nicht ausgeführten) Fall $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ erledigen. Auch beim Verfahren S_α (vgl. ZELLER [1958], S. 142) kann man so vorgehen.

Liegen die Konstante $a > 0$ und die (nicht notwendig (1.5) erfüllende) Folge $\lambda = \{\lambda_n\}$ vor, so werde die Matrix mit den Elementen (3.1) durch $T_{\lambda,a}$ bezeichnet. Das durch $T_{\lambda,a}$ in der Reihe-Reihe-Form gegebene Summierungsverfahren („Dirichlet-Taylor-Verfahren") hängt eng zusammen, ist aber nicht identisch, mit dem in **2** betrachteten $V_{\lambda,a}$-Verfahren. Existiert $T_{\lambda,a}\text{-}\sum_n u_n$, so gilt $\sigma \geqq a$ für die Dirichlet-Reihe (1.1). Wir unterscheiden reguläre und singuläre $T_{\lambda,a}$-Summierbarkeit von $\sum_n u_n$, je nach Regularität bzw. Singularität von $u(z)$ an der Stelle $z = a$. Aus der regulären $T_{\lambda,a}$-Summierbarkeit einer

Reihe folgt ihre $V_{\lambda,a}$-Summierbarkeit. Dementsprechend gilt der in **3** für das $V_{\lambda,a}$-Verfahren formulierte Umkehrsatz auch für das reguläre $T_{\lambda,a}$-Verfahren. Die Beschränkung auf reguläre $T_{\lambda,a}$-Summierbarkeit ist hierbei wesentlich. Dies beweist man ebenso wie die analoge Aussage beim Taylor-Verfahren T_α (vgl. MEYER-KÖNIG und ZELLER [1958], S. 49, Satz 7).

Literatur

CARLSON, F., u. E. LANDAU [1921]: Neuer Beweis und Verallgemeinerungen des Fabryschen Lückensatzes. Gött. Nachr. 184—188.

HARDY, G. H. [1949]: Divergent series. Oxford.

MEYER-KÖNIG, W. [1952]: Das Taylorsche Verfahren zur Limitierung von Funktionen. Math. Z. **56**, 179—205.

MEYER-KÖNIG, W., u. K. ZELLER [1956]: Lückenumkehrsätze und Lückenperfektheit. Math. Z. **66**, 203—224.

MEYER-KÖNIG, W., u. K. ZELLER [1958]: Funktionalanalytische Behandlung des Taylorschen Summierungsverfahrens. Centre Belge de Recherches Mathématiques. Colloque sur la théorie des suites, Tenu à Bruxelles du 18 au 20 décembre 1957, Paris u. Louvain, 32—53.

ZELLER, K. [1951]: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. **53**, 463— 487.

ZELLER, K. [1953]: FK-Räume in der Funktionentheorie. I. Math. Z. **58**, 288—305.

ZELLER, K. [1958]: Theorie der Limitierungsverfahren. Berlin-Göttingen-Heidelberg.

Stuttgart, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 24. Februar 1960)

Hofmann, K. H.
Math. Zeitschr. 74, 232—277 (1960)

Topologische Halbgruppen mit dichter submonogener Unterhalbgruppe

Herrn Erich Kamke zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von

Karl Heinrich Hofmann

Einleitung. Beim Studium topologisch algebraischer Strukturen, seien es topologische Gruppen, topologische Loops oder topologische Halbgruppen, sieht man sich sehr häufig genötigt, die einparametrigen Unterstrukturen zu untersuchen, die algebraisch isomorphe Bilder von Unterstrukturen der additiven Gruppe aller reellen Zahlen sind. Der bekannteste Fall ist die Untersuchung einparametriger stetiger Untergruppen in topologischen Gruppen, die sich bei der Lösung des fünften Hilbertschen Problems als so fundamental erwiesen hat (s. z.B. [*9*], [*10*], besonders [*19*] und die dort aufgeführte Bibliographie). Ähnlich wichtig ist die Kenntnis von Einparameterhalbgruppen bei der Strukturuntersuchung gewisser Klassen topologischer Halbgruppen ([*2*], [*4*], [*6*], [*12*], [*20*], [*24*]), und schließlich zeigte sich auch beim Studium nichtassoziativer topologisch algebraischer Strukturen, welch tragkräftiges methodisches Hilfsmittel die Verwendung einparametriger Unterstrukturen darstellt [*13*], [*14*], [*18*]. Drückt man sich anschaulich aus, so kann man die große Bedeutung der stetigen Einparameterstrukturen darauf zurückführen, daß sie die minimalen zusammenhängenden Unterstrukturen sind, die man in einer topologisch algebraischen Struktur finden kann; sie entsprechen daher in gewisser Weise den monogenen, d.h. von einem Element erzeugten Unterstrukturen in algebraischen Strukturen, die dort als die feinsten Bausteine anzusehen sind. Man hat sich diese letztere Erkenntnis auch für die Behandlung topologisch algebraischer Strukturen zunutze gemacht, indem man die abgeschlossenen Hüllen der von jeweils einem Element erzeugten Unterstrukturen in einer topologisch algebraischen Struktur, insbesondere in Halbgruppen untersuchte; diese Studien erscheinen sämtlich im Gefolge jenes klassischen Lemmas von A. Weil [*25*], daß nämlich eine monogene Untergruppe in einer lokalkompakten topologischen Gruppe entweder einer unendlich diskreten monogenen Gruppe isomorph oder in einer kompakten Untergruppe dicht ist ([*11*], [*16*], s. dazu auch [*27*]). Die vorliegende Arbeit kann in gewisser Weise als simultane Behandlung der stetigen Einparameterhalbgruppen und der im topologischen Sinne von einem Element erzeugten Halbgruppen angesehen werden; wir untersuchen nämlich solche Halbgruppen, in denen eine Unterhalbgruppe dicht ist, die von höchstens abzählbar vielen Elementen algebraisch erzeugt wird; der Leitgedanke dabei ist der folgende: Ist E eine Einparametergruppe in einer topologischen Gruppe und h ein stetiger algebraischer Homomorphismus der additiven Gruppe R' aller reellen Zahlen auf E, so gibt es

in E mit einer natürlichen Zahl p eine Folge $h(1)$, $h(1/p)$, $h(1/p^2)$, die eine dichte Untergruppe von E algebraisch erzeugt. Es gibt natürlich viele Folgen ähnlicher Art mit dieser Eigenschaft. Nimmt man für p eine Primzahl, so hat diese Untergruppe gewisse Minimalitätseigenschaften, die sie für den Zweck unserer Untersuchungen besonders brauchbar macht. Gruppen und Halbgruppen, die von einer Folge sukzessiver Wurzeln von der Art des Beispiels erzeugt werden, nennen wir submonogen. (Dieser Begriff ist mit dem Begriff „quasizyklisch" aus der Theorie der abelschen Gruppen nahe verwandt [7]; jede quasizyklische Gruppe ist submonogen, aber auch eine eindimensionale rationale Vektorgruppe ist mit dem später genau zu definierenden Begriff submonogen.) Ist nun eine topologisch algebraische Struktur K gegeben, so ist es recht oft möglich, eine submonogene Untergruppe oder Unterhalbgruppe zu finden. Häufig hat man z. B. eine unstetige Einparametergruppe F in K, in der sich natürlich viele submonogene Untergruppen finden lassen. Denken wir uns, um ein anderes Beispiel zu geben, eine kompakte zusammenhängende topologische Halbgruppe K mit genau zwei idempotenten Elementen e und f und bezeichnen mit $K(2^n)$ die Menge aller 2^n-ten Potenzen in K. Die monotone Folge der kompakten und zusammenhängenden Teilräume $K(2^n)$ hat einen nichttrivialen, zusammenhängenden Durchschnitt, der e und f enthält und in dem jedes von e und f verschiedene Element eine von ihm verschiedene zweite Wurzel hat. Die Folge der Quadratwurzeln eines von e und f verschiedenen Elementes erzeugt algebraisch eine submonogene Unterhalbgruppe. Die Frage, die man in allen solchen Fällen immer stellen kann, ist die, ob eine submonogene Unterhalbgruppe in einer topologischen Oberstruktur stets eine Einparameterhalbgruppe oder wenigstens eine zusammenhängende Halbgruppe als abgeschlossene Hülle hat. Diese Frage ist sicher mit nein zu beantworten, wie schon das Beispiel eines vollständigen rational-p-adischen Körpers zeigt; hier enthält die additive Gruppe natürlich vielerlei submonogene Untergruppen, deren Hülle aber sicher total unzusammenhängend ist. Wenn im folgenden eine allgemeine Theorie der Halbgruppen entfaltet werden soll, die eine dichte submonogene Unterhalbgruppe enthalten, so muß sie auch Beispiele dieser Art umfassen. Die von uns verfolgte Theorie gilt in erster Linie für kompakte topologische Halbgruppen; zugleich ist sie aber so angelegt, daß auch eine sehr weite Klasse lokalkompakter Halbgruppen miterfaßt wird, nämlich auch alle diejenigen lokalkompakten und nicht kompakten Halbgruppen K, deren Multiplikation $(x, y) \to xy$ sich so auf ihre Einpunktkompaktifizierung $K = K \cup \{a\}$ durch die Festsetzung $xa = ax = a$ fortsetzen läßt, daß sie höchstens im Punkt (a, a) unstetig wird. K nennen wir dann eine kompakte fasttopologische Halbgruppe. So werden z. B. alle lokalkompakten Unterhalbgruppen lokalkompakter topologischer Gruppen in diese Klasse fallen Die kennzeichnende Eigenschaft der lokalkompakten Halbgruppen, die sich zu kompakten fasttopologischen Halbgruppen erweitern lassen, läuft im wesentlichen darauf hinaus, daß bei sämtlichen Translationen kompakte Bildräume auch kompakte Urbildräume haben. Das folgende Beispiel gibt eine lokalkompakte topologische Halbgruppe, die sich nicht in eine kompakte

fasttopologische Halbgruppe einbetten läßt: R' bezeichne die additive Gruppe aller reellen Zahlen in der natürlichen Topologie, und R die Halbgruppe aller nicht negativen reellen Zahlen. Auf dem direkten Produkt $R' \times R$ sei γ diejenige Kongruenzrelation, die alle Paare (r, s), (r', s') aus $R' \times R$ mit $s = s'$ identifiziert, wenn $s \geqq 1$ ist. Die Restklassenhalbgruppe $(R' \times R)/\gamma$ nach dieser Kongruenzrelation weist nicht kompakte Teilräume, etwa $\gamma(R' \times \{0\})$ auf, die durch Translation, etwa mit dem Element $\gamma(0, 2)$ auf einen kompakten Teilraum, der hier nur aus einem Punkt besteht, abgebildet werden. $(R' \times R)/\gamma$ ist homöomorph einem Dreieck, von dessen Rand man nur eine offene Seite und die gegenüberliegende Ecke übrigläßt, in welcher ein offener Jordanbogen angehängt ist. Ersetzt man in dem Produkt $R' \times R$ den Faktor R' durch die eindimensionale Torusgruppe der reellen Zahlen modulo 1, so gehört die Restklassengruppe zu unserer Klasse; sie ist auch in der Tat ein Beispiel für eine Halbgruppe, in der eine submonogene Halbgruppe dicht sein kann; sie ist homöomorph einer abgeschlossenen Kreisscheibe, in deren Mittelpunkt ein offenes Intervall angehängt ist.

Wir untersuchen im § 1 die algebraische Struktur aller submonogenen Halbgruppen, d.h. solcher Halbgruppen auf die es einen algebraischen Homomorphismus f von einer submonogenen Unterhalbgruppe von R gibt. Im dritten und wichtigsten Paragraphen wenden wir uns der Struktur fasttopologischer kompakter Halbgruppen K zu, in die eine submonogene Unterhalbgruppe G von R durch f dicht abgebildet wird. Wir bilden die beiden Teilräume $C = \bigcap \{\overline{f((0, r] \cap G)} : 0 < r\}$ und $D = \bigcap \{\overline{f((r, \infty) \cap G)} : 0 < r\}$, die den Schlüssel zu unserer Klassifikation liefern. Nach eventueller Entfernung des Ausnahmepunktes a von C und D bilden diese Teilräume nämlich lokalkompakte abelsche Gruppen. Ist G monogen, so ist C leer und D ist kompakt, was bei den Untersuchungen kompakter Halbgruppen mit dichter monogener Unterhalbgruppe längst bekannt ist ([11], [16]).

Die wichtigere Rolle in unseren Untersuchungen spielt die aus C hervorgehende Gruppe C, da ihr Umfang die Abweichung der Halbgruppe K von einer stetigen Einparameterhalbgruppe mißt; besteht nämlich C insbesondere nur aus dem Neutralelement 1, so ist in K in der Tat eine dichte Einparameterhalbgruppe enthalten; die Stetigkeit des algebraischen Homomorphismus f bezüglich der Intervalltopologie auf G liest man dann ja unmittelbar aus der Definition von C ab. Dieser Fall ist aber sehr speziell; im allgemeinen können wir in K nur dann mit Sicherheit die Existenz einer stetigen Einparameterhalbgruppe nachweisen, wenn C nicht leer ist und nicht nur den Ausnahmepunkt a, aber auch nicht ganz K enthält. In diesem Fall allerdings, und dies ist in knapper Form eines unserer Hauptergebnisse, können wir einen Homomorphismus des direkten Produktes $C \times R$ auf eine dichte Unterhalbgruppe von K angeben, bei dem $\{1\} \times R$ nicht trivial abgebildet wird; dieser Homomorphismus wird sehr genau analysiert werden.

Die Zusammenhangskomponente des Neutralelements von 1 in C ist kompakt. Wird die Gruppe G von einer Zahlenfolge $1, 1/p, 1/p^2, \ldots$ mit einer Primzahl p erzeugt, so können wir über C schärfere Aussagen machen: In

diesem Fall ist C kompakt, und die Faktorgruppe nach der Zusammenhangskomponente ist ein projektiver Limes monogener Gruppen von endlicher, zu p teilerfremder Ordnung. Eine rein algebraische Voraussetzung führt so zu Folgerungen nicht rein algebraischer Natur. Die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit sind am Schluß in einem Hauptsatz zusammengestellt. Ein Teil der Ergebnisse hat eine gewisse äußerliche Verwandtschaft zu den Resultaten einer Arbeit von MOSTERT und SHIELDS [20], obgleich in den Halbgruppen auf kompakten Mannigfaltigkeiten mit Rand dort ein wesentlich anderer Untersuchungsgegenstand zugrunde liegt als bei uns; die Klasse der betrachteten Halbgruppen ist in dieser vorliegenden Arbeit weniger durch strenge topologische, als vielmehr durch algebraische Voraussetzung begrenzt. Von den in jener Arbeit für allgemeinere Klassen von Halbgruppen gestellten Problemen (S. 142) sind die meisten auf unsere Halbgruppenklasse sinnvoll angewandten Fragen positiv zu beantworten, so z.B. P_1, P_3, P_6 und P_7. Es ist geplant, in einer weiteren Arbeit die durch die vorzutragende Theorie möglich gewordenen Anwendungen zusammenzustellen.

Der zweite Paragraph dieser Arbeit ist von den anderen Paragraphen nahezu unabhängig; auch ist seine Lektüre zum Verständnis des zentralen dritten Paragraphen nicht Voraussetzung. In diesem Abschnitt wird unter Angabe von zahlreichen Beispielen untersucht, welche Topologien auf einer submonogenen Unterhalbgruppe der nichtnegativen Halbgeraden auftreten können; insbesondere werden Konstruktionsprinzipien angegeben, wie solche Topologien aus schon vorhandenen neu aufgebaut werden können. Das wichtigste Resultat aus diesem Paragraphen ist das folgende: Ist G' eine nicht von einem Element erzeugte submonogene Untergruppe der additiven Gruppe aller reellen Zahlen, so gibt es Gruppentopologien auf G', die nicht diskret, aber echt feiner sind als die Intervalltopologie auf G'. Aus den Resultaten des dritten Paragraphen folgt, daß eine derartige topologische Gruppe nicht in einer lokalkompakten Gruppe dicht sein kann, wenn die induzierte Topologie mit der angegebenen übereinstimmen soll.

§ 1. Die algebraische Klassifikation submonogener Halbgruppen

Die im folgenden einzuführenden Bezeichnungen sollen in der ganzen Arbeit festgehalten werden.

(1.1) *R sei die additive Halbgruppe aller nichtnegativen reellen Zahlen, R' die additive Gruppe aller reellen Zahlen. N bezeichne die Folge aller natürlichen Zahlen.*

(1.2) G sei eine Unterhalbgruppe von R; es gebe Folgen $(r_i: i \in N)$ reeller und $(n_i: i \in N)$ natürlicher Zahlen, mit welchen G die folgenden Bedingungen erfüllt:

a) Für alle $i \in N$, $i > 1$ gilt $r_{i-1} = n_i r_i$.

b) G ist die Vereinigung der von r_i in $R \setminus \{0\}$ erzeugten Halbgruppen $\langle r_i \rangle$.

Sind diese Bedingungen befriedigt, so nennen wir *G eine submonogene Unterhalbgruppe von R.* Eine beliebige Halbgruppe heißt *submonogen*, wenn

eine submonogene Unterhalbgruppe von R existiert, deren algebraisch homomorphes Bild sie ist. Jedes algebraisch homomorphe Bild einer Untergruppe von R', die Vereinigung abzählbar vieler monogener, d.h. von einem Element erzeugter Untergruppen ist, heißt *eine submonogene Gruppe*. Die von einer submonogenen Unterhalbgruppe von R in R' erzeugte Untergruppe ist submonogen. Falls alle n_i von einem bestimmten Index an gleich 1 sind, ist G *monogen*, d.h. von einem Element allein erzeugt.

In dem Rest des Paragraphen werden wir in erster Linie submonogene Halbgruppen im Auge haben; es sei jedoch an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß große Stücke der dabei zu entwickelnden Theorie nicht nur für submonogene, sondern sogar noch für solche Halbgruppen gilt, die algebraisch homomorphe Bilder beliebiger Unterhalbgruppen von R sind.

(1.3) *Ist H eine beliebige, multiplikativ geschriebene Halbgruppe, in der eine Folge $(x_i: i \in N)$ so existiert, daß mit einer gewissen Folge $(n_i: i \in N)$ natürlicher Zahlen für alle $i \in N$, $i > 1$ die Beziehungen $x_{i-1} = x_i^{n_i}$ gelten und H die Vereinigung der von den Elementen x_i erzeugten monogenen Unterhalbgruppen ist, dann ist H submonogen.*

Beweis. Wir definieren die reellen Zahlen r_i durch $r_i = 1/n_1 \dots n_i$ und bilden die Vereinigung G der von den Zahlen r_i in R erzeugten monogenen Unterhalbgruppen. Die Abbildung, die einem beliebigen natürlichen Vielfachen qr_i von r_i das Element x_i^q zuordnet — daß diese Vorschrift wirklich eine Abbildung definiert, ist sofort zu sehen —, ist der nachzuweisende algebraische Homomorphismus von G auf H.

(1.4) *Ist eine Unterhalbgruppe der Halbgruppe aller positiven Rationalzahlen mit der Addition als Verknüpfung der Schnitt einer Untergruppe von R' mit R, so ist sie submonogen.*

Beweis. Die additive Gruppe aller Rationalzahlen ist submonogen, denn sie wird von den Elementen $r_i = 1/i!$, $i \in N$ erzeugt. Die Behauptung folgt damit aus dem folgenden Hilfssatz:

(1.5) *Jede Untergruppe einer submonogenen Gruppe ist submonogen.*

Beweis. Es sei G die Vereinigung der aufsteigenden Folge monogener Untergruppen $\langle x_i \rangle$. Ist H eine Untergruppe von G, so ist $H \cap \langle x_i \rangle$ eine monogene Untergruppe $\langle y_i \rangle$ von H und H ist die Vereinigung aller $\langle y_i \rangle$.

Die in der folgenden Nummer definierten Begriffe spielen in der Klassifikation der submonogenen Halbgruppen eine wichtige Rolle.

(1.6) *G sei eine submonogene Unterhalbgruppe von R oder R selbst und f ein algebraischer Homomorphismus von G auf die Halbgruppe H. Die Teilmengen J_1 und J_2 von G seien durch die nachstehend angegebenen Bedingungen definiert:*

a) $J_1 = \{r$: *Es gibt ein* $s \in G$ *mit* $0 \leqq s < r$ *und* $f(s) = f(r)\}$,

b) $J_2 = \{r$: *Es gibt ein* $s \in G$ *mit* $r < s$ *und* $f(s) = f(r)\}$.

Das Bild von J_1 in H nennen wir I. Aus den Definitionen folgt sofort, daß J_1, J_2 und I Ideale in dem bei Halbgruppen gebräuchlichen Sinn in G bzw. H

darstellen. Wir setzen

$$j_1 = \begin{cases} \inf J_1, & \text{wenn } J_1 \neq \emptyset \\ \infty, & \text{wenn } J_1 = \emptyset \end{cases} \quad \text{und} \quad j_2 = \begin{cases} \inf J_2, & \text{wenn } J_2 \neq \emptyset \\ \infty, & \text{wenn } J_2 = \emptyset. \end{cases}$$

Es gilt $j_1 \leqq j_2$.

(1.7) *Ist* $j_1 = \infty$, *so ist* f *ein algebraischer Isomorphismus.*

Der Beweis ist trivial, weil unter diesen Voraussetzungen f eineindeutig ist.

(1.8) *Es sei* $j_1 < j_2 \leqq \infty$. *Dann ist* $I = f(J_1)$ *algebraisch isomorph einer submonogenen Untergruppe der additiven Gruppe aller rationalen Zahlen modulo* 1 *oder isomorph zur additiven Gruppe aller reellen Zahlen modulo* 1, *letzteres genau dann, wenn* $G = R$. *Das Intervall* $[0, j_2) \cap G$ *wird durch* f *eineindeutig abgebildet. Die Zahl* $j_2 - j_1 = j$ *liegt in* G, *und für alle* $r \in G$, $r > j_1$ *gilt* $f(r+j) = f(r)$.

Beweis. Um zu zeigen, daß I eine Gruppe ist, genügt es, zu beweisen, daß in I die Gleichung $f(r) f(x) = f(s)$ stets nach $f(x) \in I$ auflösbar ist. Wegen $s \in J_1$ gibt es sicher ein $z = s + h$ mit $h \in G$ und $h > 0$ so, daß $f(s) = f(s+h) = f(s) f(h)$. Da dann für alle natürlichen Zahlen m auch die Beziehung $f(s) = f(s + mh)$ gilt, können wir o.B.d.A. sogar $h \in J_1$ annehmen. Nun suchen wir eine natürliche Zahl n, die so groß ist, daß $x = nh + s - r$ in J_1 liegt. Dann bekommen wir $f(r) f(x) = f(nh + s) = f(nh) f(s) = f(s)$, und dies war zu zeigen. Mit V bezeichnen wir die Menge aller Elemente v in G, für welche stets $f(r) f(v) = f(r)$ gilt, wie auch r aus J_1 gewählt wird. V umfaßt alle Urbilder des Neutralelementes von I. Liegen nun die Elemente v und w mit $v > w$ in V, so liegt auch $v - w$ darin, denn es gilt $f(r) f(v - w) = \big(f(r) f(w)\big) f(v - w) = f(r) f(v) = f(r)$. Demnach ist V der Schnitt einer Untergruppe V' von R' mit R. Diese Untergruppe ist auf R' hinsichtlich der Intervalltopologie auf R' diskret und daher monogen: Liegt nämlich in dem Intervall (j_1, j_2) kein Element von G, so ist dies trivialerweise richtig, da dann die submonogene Halbgruppe G in der Intervalltopologie diskret und also monogen ist; aus der Definition von j_1 und j_2 ergibt sich in diesem Fall, daß V' von $j = j_2 - j_1$ erzeugt wird. Nun sei $r \in G \cap (j_1, j_2)$; dann liegt in dem Intervall $(0, j_2 - r)$ kein Element v aus V; andernfalls nämlich müßte $f(r+v) = f(r)$ mit $j_1 < r < r + v < j_2$ gelten, was zur Definition von j_2 in Widerspruch steht. Somit ist V' diskret und daher von einem Element j erzeugt, für welches $j \geqq j_2 - j_1$ gilt . Wäre aber $j > j_2 - j_1$, so würde das Intervall $[j_1, j_1 + j)$, das in dem Fall einer nicht monogenen Halbgruppe G das Intervall $[j_1, j_2]$ echt umfaßt, durch die Abbildung f eineindeutig abgebildet werden, was mit der Definition von j_2 nicht verträglich wäre. Es gibt eine eindeutig bestimmte kleinste natürliche Zahl n derart, daß nj in J_1 liegt. $f(nj)$ ist das Neutralelement von I. Die Abbildung g, die durch $g(x) = f\big(j(n+x)\big)$ definiert ist, stellt einen algebraischen Homomorphismus der Unterhalbgruppe $\frac{1}{j} G$ von R auf I dar, der auf den Klassen modulo 1 konstant ist. Er läßt sich, da das Bild eine Gruppe ist, zu einem algebraischen Homomorphismus der von $\frac{1}{j} G$ in R' erzeugten Gruppe $\frac{1}{j} G'$ auf I fortsetzen; der

Kern ist dabei die von 1 erzeugte Untergruppe von R'. Damit ist die Behauptung bewiesen.

(1.9) *Wir nennen eine submonogene Halbgruppe (bzw. Gruppe) scharf submonogen, wenn sie algebraisch homomorphes Bild einer Unterhalbgruppe G von $R \setminus \{0\}$ (bzw. einer Untergruppe G' von R') ist, für welche man eine Erzeugendenfolge $(r_i: i \in N)$ mit $r_1 = 1$, $r_i = p r_{i+1}$, $i = 2, \ldots$ findet, wo p eine feste Primzahl ist. Gelegentlich nennen wir p den Teiler von G. Die einzigen submonogenen nicht monogenen Unterhalbgruppen von G (bzw. Untergruppen von G') sind die Halbgruppen $nG = \{nr: r \in G\}$ (bzw. die Gruppen nG') mit einer natürlichen Zahl n, die von p nicht geteilt wird. Demnach hat G' als endliche algebraisch homomorphe Bilder die monogenen Gruppen der Ordnung n, $p \nmid n$. Die Gruppe $G'/\langle 1 \rangle$ ist algebraisch isomorph einer Prüferschen Gruppe $Z(p^\infty)$ und hat keine nicht monogene Untergruppe außer sich selbst. $G'/\langle n \rangle$ (mit $p \nmid n$) ist isomorph dem direkten Produkt von $Z(p^\infty)$ und der monogenen Gruppe der Ordnung n. Da sich jeder algebraische Homomorphismus von G in eine Gruppe zu einem Homomorphismus von G' in die Gruppe fortsetzen läßt, sind dies auch die einzigen algebraisch homomorphen Bilder von G, die Gruppen sind.*

Beweis. Wir können uns auf die Behandlung von G' beschränken. Jedes Element von G' ist durch p^i, $i \in N$ dividierbar, denn die Gleichung $p^i x = r$ hat in G' die Lösung $x = s \cdot r_{i+m+1}$, wenn $r = s/p^m = s \cdot r_{m+1}$ mit $m \in \{0, 1, \ldots\}$. Es sei nun G_0' eine von allen Untergruppen nG', $p \nmid n$ verschiedene Untergruppe von G', und $(s_i: i \in N)$ mit $s_1 = s_0/p^{m_0}$, $(s_0, p) = 1$ und $s_i = n_{i+1} s_{i+1}$ sei ein Erzeugendensystem für die submonogene Untergruppe G_0'. Dann existiert ein $i_0 \in N$ derart, daß für alle $i \geqq i_0$ alle n_i Primzahlpotenzen von p sind, denn s_0 enthält nur endlich viele Primfaktoren. O.B.d.A. sei jetzt $i_0 = 1$. Dann ist aber G_0' von in $s_0 G'$ enthalten und enthält andererseits s_0. Wären alle p-Potenzen n_i von 1 verschieden, so wäre demnach $G_0' = s_0 G'$ im Widerspruch zur Annahme, daß G_0' von allen nG' mit $p \nmid n$ verschieden sein sollte. Danach sind für alle hinreichend großen i die Zahlen $n_i = 1$ und G_0' ist monogen. Es sei n eine natürliche Zahl mit $p \nmid n$. Dann ist die Gruppe $G'/\langle n \rangle$ algebraisch isomorph einer Untergruppe der additiven Gruppe aller rationalen Zahlen modulo 1 und jedes Element hat eine Ordnung der Form $p^m t$ mit $t \mid n$, $p \nmid t$. Damit folgt die angegebene Struktur von $G'/\langle n \rangle$ aus der bekannten Struktur jener Gruppe. Es sei angemerkt, daß die Nichtexistenz monogener Faktorgruppen einer Gruppe für ihre Dividierbarkeit notwendig und hinreichend ist [3].

(1.10) *G' sei eine submonogene, aber nicht monogene Untergruppe von R'. Dann gibt es zwei möglicherweise nicht beide nichtleere Mengen P_1 und P_2 von Primzahlen, so daß eine Primzahl höchstens in einer der beiden Mengen und dann nur einmal enthalten ist und daß für jedes von 0 verschiedene Element d aus G' die folgenden Aussagen gelten:*

a) *Zu jedem $p \in P_1$ gibt es eine eindeutig bestimmte scharf submonogene Untergruppe $G_p'(d) = \{x: x = dm/p^n, m, n \text{ ganz}\}$ in G'.*

b) *Zu jedem $p \in P_2$ gibt es eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl $n(p)$, die definiert ist als die größte unter den natürlichen Zahlen m, für welche die*

Gleichung $p^m \cdot x = d$, eine Lösung in G' besitzt; die monogene Gruppe $G'_p(d) = \langle d/p^{n(p)} \rangle$ ist in G' enthalten.

c) *G' ist die Summe aller Gruppen $G'_p(d)$, $p \in P_1 \cup P_2$; der Durchschnitt von zwei beliebigen dieser Gruppen ist $\langle d \rangle$.*

Beweis. G' sei erzeugt von den Elementen r_i, die den Rekursionsformeln $r_i = n_{i-1} r_{i-1}$, $r_1 = d$, $i \in N$ genügen. P_1 sei die Menge der Primzahlen p, die in unendlich vielen der n_i aufgehen, P_2 die Menge derjenigen Primzahlen, die nur in endlich vielen der n_i als Teiler enthalten sind. G' ist dann durch alle Potenzen der in P_1 liegenden Primzahlen dividierbar, und jedes feste Element von G' durch eine wohlbestimmte größte Potenz jeder in P_2 liegenden Primzahl. Damit ist a) und b) nachgewiesen. Für zwei teilerfremde ganze Zahlen r und s existieren stets zwei ganze Zahlen m und n derart, daß $m\,d/r + n\,d/s = d/rs$. Daraus folgt schließlich $G' = \Sigma\{G'_p(d) : p \in P_1 \cup P_2\}$. Die Behauptung über den Durchschnitt von zwei der Gruppen $G'_p(d)$ ist auf Grund der Definition dieser Gruppe unmittelbar einzusehen.

Die Untergruppe $\Sigma\{G'_p(d) : p \in P_2\}$ kann wohl submonogene und nicht monogene Untergruppen enthalten, nicht aber scharf submonogene Untergruppen. Insbesondere braucht also eine submonogene nicht monogene Gruppe keine scharf submonogenen Untergruppen zu besitzen. Die in Satz (1.10) gegebene Summendarstellung braucht für submonogene Halbgruppen nicht zu gelten.

(1.11) *G sei eine scharf submonogene Halbgruppe mit dem Teiler p; mit den Bezeichnungen von* (1.6) *gelte $j_1 < \infty$ und $j_1 = j_2$. Dann ist $I = f(J_1)$ eine monogene Gruppe mit endlicher zu p teilerfremder Ordnung.*

Beweis. V bezeichne wieder wie in (1.8) die Menge aller Elemente $v > 0$, für die mit allen Elementen $r \in J_1$ die Beziehung $f(r+v) = f(r)$ gilt. Aus der Definition von j_1 und j_2 und der Beziehung $j_1 = j_2$ folgt, daß $\inf V = 0$ ist. Da V' eine Untergruppe der submonogenen Gruppe G' ist, für die $V = V' \cap R \setminus \{0\}$ gilt, ist V eine submonogene Unterhalbgruppe von G, die wegen $\inf V = 0$ nicht monogen ist; es gilt $V = nG$ mit einer natürlichen Zahl n, die von p nicht geteilt wird, und $V' = nG'$. Ist $v \in V$ und $v > j_1$, so ist $r \to f(v+r)$ ein algebraischer Homomorphismus von G auf $f(v+G) = f(v+J_1) = f(J_1) = I$, der sich zu einem algebraischen Homomorphismus von G' auf I fortsetzen läßt, und dessen Kern nG' ist. Dann ist I algebraisch isomorph zu G'/nG', und diese Gruppe ist monogen von der Ordnung n.

(1.12) *H sei eine submonogene Halbgruppe, und mit den Bezeichnungen von* (1.6) ff. *sei $j_1 < \infty$ und $j_1 = j_2$. Das Urbild von H heiße wieder G, und G' sei die von G in R' erzeugte Untergruppe. I ist ein nicht treues algebraisch homomorphes Bild von G' und ist algebraisch isomorph einer Untergruppe der Gruppe aller Rationalzahlen modulo 1.*

Beweis. Zu einem $w \in V$ sei die natürliche Zahl n so gewählt, daß $f(nw)$ das Neutralelement der Gruppe $I = f(J_1)$ ist. Dann ist die Abbildung $x \to f(nw + x)$

ein algebraischer Homomorphismus von G in I und wegen $f(nw+J_1)=f(J_1)=I$ sogar auf I. Dieser Homomorphismus ist nicht eineindeutig, da I eine Gruppe ist, nicht aber G. Eine Fortsetzung dieses algebraischen Homomorphismus zu einem algebraischen Homomorphismus von G' auf I ist leicht möglich; diese Fortsetzung heiße $\bar{f}$. Ist d ein Element des Kerns K von $\bar{f}$ und D die von ihm erzeugte monogene Gruppe, so ist G'/D isomorph einer Untergruppe der rationalen Zahlen modulo 1 und I ist isomorph zu $(G'/D)/(K/D)$. Modulo D zerfällt aber G' nach (1.10) in eindeutig bestimmte charakteristische direkte Summanden. Die Gruppen $G'_p(d)/D$, $p\in P_1$ sind isomorph zu den Prüferschen Gruppen $Z(p^\infty)$, und jedes ihrer homomorphen Bilder ist zu $Z(p^\infty)$ selbst isomorph oder einelementig. Die homomorphen Bilder einer Gruppe $\langle d/p^{n(p)}\rangle/D$ sind wieder monogene p-Gruppen und daher Untergruppen von $Z(p^\infty)$. Da die additive Gruppe der rationalen Zahlen modulo 1 direkte Summe der Gruppen $Z(p^\infty)$, von denen zu jeder Primzahl genau eine als Summand auftritt, ist I in der Tat isomorph einer Untergruppe dieser Gruppe. Wegen $\inf V=0$ umfaßt K/D unendlich viele Elemente.

(1.13) Die in den Nummern (1.8), (1.11) und (1.12) beschriebenen Typen treten auch wirklich auf.

Beweis. G' sei eine submonogene Untergruppe von R' oder sei gleich R' und f sei ein algebraischer Homomorphismus von G' auf eine Gruppe I'. Es sei j eine beliebige reelle Zahl aus R. Mit G werde der Durchschnitt $G'\cap R\setminus\{0\}$ bezeichnet und mit ϱ diejenige Äquivalenzrelation auf der Menge $G\cup I'$, deren Klassen nur den Punkt x enthalten, wenn $x\in G$, $x<j$ oder $x\in I'$ aber $x\notin f\big([j,\infty)\cap G'\big)$, deren Klassen aber aus den zwei Elementen x und $f(x)$ bestehen, wenn $x\in G\cap[j,\infty)$ oder $f(x)\in f\big(G\cap[j,\infty)\big)$. Auf dem Klassenraum $H=(G\cup I')/\varrho$ wird eine Verknüpfung definiert durch die Festsetzungen

a) $\varrho(x)\cdot\varrho(y)=\varrho(xy)$, wenn $x,y\in I'$,

b) $\varrho(s)\cdot\varrho(t)=\varrho\big(f(s+t)\big)$, wenn $s,t\in G$,

c) $\varrho(s)\cdot\varrho(y)=\varrho\big(f(s)\,y\big)$, wenn $s\in G$, $y\in I'$.

Auf $\varrho(G)\cap\varrho(I')$, d.h. der Menge der zweielementigen Klassen ist diese Definition wegen $f(s+t)=f(s)\,f(t)$ zulässig; ϱ ist auf I' eine algebraisch isomorphe Abbildung und auf G ein algebraischer Homomorphismus. Auf die rechnerische Nachprüfung der Assoziativität im Ganzen verzichten wir, ebenso begnügen wir uns mit dem Hinweis, daß sich mit diesem Konstruktionsverfahren jeder der in (1.8), (1.11) und (1.12) genannten Typen herstellen läßt.

Die Ergebnisse dieses Paragraphen fassen wir in dem folgenden Satz zusammen:

SATZ I

(1.15) *H sei eine submonogene Halbgruppe oder ein algebraisch homomorphes Bild von R; G sei eine submonogene Unterhalbgruppe von R oder R selbst, und f ein algebraischer Homomorphismus von G auf H. Die Ideale J_1 und J_2 in G seien definiert wie in* (1.4), *ebenso die Elemente j_1 und j_2 aus $R\cup\{\infty\}$.*

Dann sind folgende Fälle möglich:

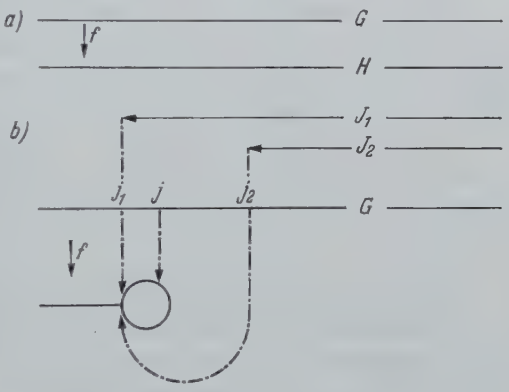
a) $j_1 = \infty$. *H ist isomorph einer submonogenen Unterhalbgruppe der Halbgruppe R aller nicht negativen reellen Zahlen oder isomorph zu R. Ist G submonogen, so läßt sich G isomorph in die additive Gruppe aller Rationalzahlen einbetten.*

b) $j_1 < j_2 \leqq \infty$.

ba) *Wenn $G = R$ ist, dann ist $I = f(J_1)$ eine Gruppe, die isomorph ist zur additiven Gruppe aller reellen Zahlen modulo* 1.

bb) *Wenn G submonogen ist, dann ist I einer Untergruppe der additiven Gruppe aller rationalen Zahlen modulo* 1 *isomorph.*

In beiden Fällen wird das Intervall $[0, j_1] \cap G$ durch f eineindeutig abgebildet. Die Zahl $j_2 - j_1$ liegt in G, und es gibt eine kleinste natürliche Zahl n derart, daß $(j_2 - j_1)\, n \in J_1$; dann ist $f((j_2 - j_1)\, n) \in J_1$ das Neutralelement der Gruppe I; die Zahlen j_1, j_2 und n bestimmen die algebraische Struktur bei gegebenem Urbild G bis auf Isomorphie eindeutig.



c) $j_1 = j_2 < \infty$.

ca) *Falls H zum Teiler p scharf submonogen ist, dann ist I eine monogene Gruppe mit zu p primer Ordnung.*

cb) *Falls H submonogen aber nicht scharf submonogen ist, dann ist I isomorph einer Untergruppe der additiven Gruppe aller rationalen Zahlen modulo* 1.

cc) *Falls $G = R$ ist, ist I ein algebraisch homomorphes Bild der additiven Gruppe aller reellen Zahlen modulo* 1. *In allen drei Fällen wird das Intervall $[0, j_1] \cap G$ durch f eineindeutig abgebildet.*

§ 2. Topologische submonogene Halbgruppen in R

(2.1) Ist $(E, \mathfrak{O})$ ein topologischer Raum, so sagen wir, die Topologie $\mathfrak{O}$ (oder auch der Raum E) genüge dem *Trennungsaxiom* T_0, wenn von zwei verschiedenen Punkten wenigstens einer eine Umgebung besitzt, die den anderen nicht enthält, dem *Trennungsaxiom* T_1, wenn jeder von zwei verschiedenen Punkten eine Umgebung hat, die den anderen nicht enthält, und schließlich dem *Trennungsaxiom* T_2, wenn zwei verschiedene Punkte zwei elementefremde Umgebungen besitzen. Im letzten Fall nennen wir den topologischen Raum auch *Hausdorffsch*. Nur ausnahmsweise betrachten wir in diesem Paragraphen nicht Hausdorffsche Räume, im dritten Paragraphen überhaupt nicht mehr.

Ist F eine Teilmenge von E, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{O}|F$ die von auf F *induzierte Topologie.*

(2.2) Eine Halbgruppe G mit der Verknüpfung $(x, y) \to xy$ heißt topologisch, wenn auf der Elementemenge von G eine Topologie $\mathfrak{O}$ erklärt ist, bezüglich der die Verknüpfung eine stetige Abbildung von $G \times G$ in G ist.

(2.3) Jeder algebraische Homomorphismus einer Halbgruppe G auf eine Halbgruppe H definiert eine Kongruenzklassenzerlegung auf G, bei der alle die Punkte in eine Klasse zusammengefaßt werden, die auf einen und denselben Punkt abgebildet werden. Der Klassenraum ist hinsichtlich der in naheliegender Weise auf ihm definierten Verknüpfung algebraisch isomorph zu H. Der Isomorphismus der Kongruenzklassenhalbgruppe auf H heiße der *kanonische Isomorphismus.* Sind G und H topologische Halbgruppen, so heißt ein algebraischer Homomorphismus von G auf H ein *Homomorphismus*, wenn er stetig ist und der kanonische Isomorphismus den Kongruenzklassenraum mit der Quotiententopologie homöomorph auf H abbildet.

Für die submonogenen Unterhalbgruppen von R definieren wir nun einen gewissen Grundvorrat von Topologien, hinsichtlich derer die Verknüpfung stetig ist und geben einige Konstruktionsverfahren an, mit welchen sich aus gegebenen Halbgruppentopologien neue gewinnen lassen.

(2.4) G sei eine submonogene Unterhalbgruppe von R oder sei gleich R selbst. Die Topologien $\mathfrak{J}_0$, $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_{00}$ und $\mathfrak{J}_{01}$ werden definiert, indem jedem Punkt $x \in G$ eine Basis für den Filter seiner Umgebungen zugeordnet wird, und zwar wird diese Basis gebildet

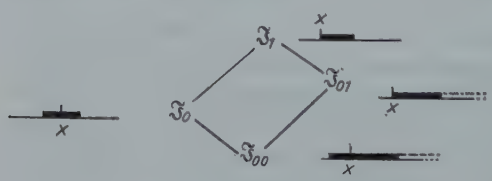
a) bei $\mathfrak{J}_0$ aus den Intervallen $[r, s)$, $r \leqq x$, $x < s$ und $r = x$ nur für $x = 0$,

b) bei $\mathfrak{J}_1$ aus den Intervallen $[x, s)$, $x < s$,

c) bei $\mathfrak{J}_{00}$ aus den Intervallen $[r, \infty)$, $r \leqq x$ und $r = x$ nur für $x = 0$,

d) bei $\mathfrak{J}_{01}$ aus den Intervallen $[x, \infty)$.

Ist eine Topologie $\mathfrak{O}$ feiner als eine Topologie $\mathfrak{O}'$, so schreiben wir $\mathfrak{O} > \mathfrak{O}'$. Mit dieser Bezeichnung gelten dann die Beziehungen $\mathfrak{J}_0 < \mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_{00} < \mathfrak{J}_{01}$, $\mathfrak{J}_{00} < \mathfrak{J}_0$ und $\mathfrak{J}_{01} < \mathfrak{J}_1$. In einem Diagramm lassen sich diese Relationen folgendermaßen veranschaulichen; neben den Kennzeichen für die Topologien sind dabei jeweils die typischen Gestalten der betreffenden Basisumgebungen von x angedeutet:



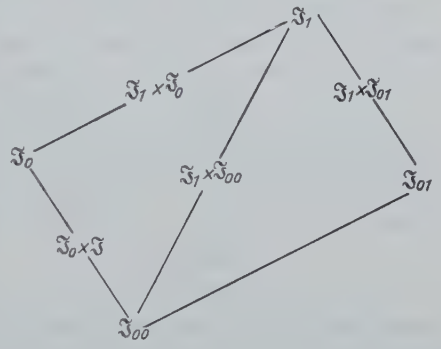
$\mathfrak{J}_1$ ist die obere Grenze der beiden Topologien $\mathfrak{J}_{01}$ und $\mathfrak{J}_0$; deren untere Grenze ist $\mathfrak{J}_{00}$.

(2.5) Sind $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{P}$ zwei Topologien auf G und ist $\mathfrak{O}$ feiner als $\mathfrak{P}$, ist ferner x ein Element aus R, so verstehen wir unter $\mathfrak{O} x \mathfrak{P}$ die gröbste unter den Topologien $\mathfrak{O}'$, für welche $\mathfrak{O}'|[0, x) \cap G = \mathfrak{O}|[0, x) \cap G$ und $\mathfrak{O}'|[x, \infty) \cap G = \mathfrak{P}|[x, \infty) \cap G$ gilt. Sind $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{P}$ mit der Addition auf G verträglich, so ist

auch $\mathfrak{D} x \mathfrak{P}$ mit der Addition verträglich für alle x; denn zu jeder $\mathfrak{D} x \mathfrak{P}$-Umgebung W von $u+v$ in G mit $u, v \in G$ existiert eine $\mathfrak{D} x \mathfrak{P}$-Umgebung U von u und eine $\mathfrak{D} x \mathfrak{P}$-Umgebung V von v derart, daß $U+V \subseteq W$; wenn $u+v<x$, so sind für U und V geeignete $\mathfrak{D}$-Umgebungen zu nehmen, da dann W jedenfalls eine $\mathfrak{D}$-Umgebung ist, aber keine $\mathfrak{P}$-Umgebung zu sein braucht. In allen anderen Fällen genügt es, bei U und V auf $\mathfrak{P}$-Umgebungen zurückzugreifen. Dabei ist davon Gebrauch gemacht, daß $\mathfrak{D}$ feiner war als $\mathfrak{P}$.

(2.6) Es sei s ein stetiger algebraischer Isomorphismus von G in eine kompakte topologische Gruppe. Überträgt man die Topologie des Bildraums durch s^{-1} auf G und nennt die dabei entstehende und mit der Addition verträgliche Topologie $\mathfrak{J}$, so gilt $\mathfrak{J}_0 < \mathfrak{J} < \mathfrak{J}_{00}$.

(2.7) In dem nachfolgenden Diagramm sind alle Topologien, die feiner sind als eine Topologie $\mathfrak{J}_0 x \mathfrak{J}$ Hausdorffsch; alle anderen Topologien genügen dem Trennungsaxiom T_0, nicht aber dem Trennungsaxiom T_1. In allen Topologien, die gröber sind als eine Topologie $\mathfrak{J}_0 x \mathfrak{J}_{00}$ gilt der Satz von HEINE-BOREL. $\mathfrak{J}_0$ ist die einzige lokalkompakte Topologie. Dabei heißt ein Raum kompakt, wenn er Hausdorffsch ist und in ihm der Satz von HEINE-BOREL gilt ([*1*] Chap. I, § 10, No 1, S. 91).



(2.8) *$(G, \mathfrak{D})$ sei eine das Element 0 enthaltende Unterhalbgruppe von R, auf der eine Topologie $\mathfrak{D}$ erklärt sei, bezüglich der die Halbgruppe topologisch ist. G sei der Schnitt einer Untergruppe G' von R' mit R. Diese Voraussetzung ist sicher erfüllt, wenn G das Element 0 enthält und $G \setminus \{0\}$ submonogen oder $G=R$ ist. Auf G' existiert dann eine wohlbestimmte Topologie $\mathfrak{D}^{(1)}$, die die gröbste ist unter allen Topologien $\mathfrak{P}$, die auf G eine Topologie induzieren, die nicht gröber ist als $\mathfrak{D}$, die G' zu einer topologischen Halbgruppe machen, und bezüglich der die sämtlichen Translationen $x \to x+t$, $t \in G$ die Unterhalbgruppe G homöomorph in sich abbilden. Ferner existiert auf G' eine Topologie $\mathfrak{D}^{(2)}$, hinsichtlich welcher G' eine topologische Gruppe bildet und die die feinste Gruppentopologie auf G' ist, welche nicht feiner ist als $\mathfrak{D}^{(1)}$.*

Beweis. Wir bezeichnen den Umgebungsfilter des Punktes $x \in G$ bezüglich der Topologie $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{U}_{\mathfrak{D}}(x)$. Die Topologie $\mathfrak{D}^{(1)}$ wird auf G' dadurch definiert, daß wir den Filter $\mathfrak{U}_{\mathfrak{D}^{(1)}}(x)$ erzeugen durch die Filterbasis, die aus allen Mengen der Form $x+U$, $U \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{D}}(0)$ besteht. Die Filterbasis $\mathfrak{B}(x)$ aus den Mengen $x+U$, wo U die Menge der $\mathfrak{D}$-offenen Umgebungen von 0 durchläuft, ist eine Basis offener Umgebungen von x in der Topologie $\mathfrak{D}^{(1)}$. Durch diese Definition entsteht auf G' tatsächlich eine Topologie: dazu hat man zu zeigen, daß zu einem y aus einer Umgebung U aus $\mathfrak{B}(x)$ eine Umgebung V aus $\mathfrak{B}(y)$ existiert, die in U enthalten ist. Aus $y \in U \subseteq x+G$ folgt zunächst $x \leqq y$.

Infolge der Stetigkeit der Addition bezüglich $\mathfrak{O}$ existiert eine $\mathfrak{O}$-offene Umgebung W aus $\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}}(0)=\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}^{(1)}}(0)$ derart, daß $y-x+W\subseteq V-x$, woraus dann $y+W\subseteq V$ folgt, was zu zeigen war. Auf Grund der Definition der Topologie $\mathfrak{O}^{(1)}$ ist leicht zu sehen, daß alle Abbildungen $x\to x+t$ auf ihrem Bildbereich eine stetige Umkehrabbildung haben, wenn diese Topologie zugrunde gelegt wird. Daß die Gruppenoperation auf G' stetig ist, folgt unmittelbar daraus, daß für alle $U\in\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}}(0)=\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}^{(1)}}(0)$ ein $W\in\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}}(0)$ existiert, für welches $W+W\subseteq U$ gilt. Da jede Halbgruppentopologie auf G', die auf G eine Topologie induziert, die nicht gröber ist als $\mathfrak{O}$, in dem Filter ihrer Nullumgebungen den Filter $\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}}(0)$ enthalten muß, da ferner eine Halbgruppentopologie $\mathfrak{P}$ auf G', mit der die Abbildungen $x\to x+t$ von G in sich Homöomorphismen sind, in jedem ihrer Umgebungsfilter $\mathfrak{U}_{\mathfrak{P}}(x)$ den Filter $x+\mathfrak{U}_{\mathfrak{P}}(0)$ enthalten muß, hat $\mathfrak{O}^{(1)}$ in der Tat die behaupteten Eigenschaften.

Die Mengen $U-U$ mit $U\in\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}^{(1)}}(0)$ erzeugen einen Filter $\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}^{(2)}}(0)$. Zu jedem $U\in\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}^{(2)}}(0)$ gibt es ein $V\in\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}^{(2)}}(0)$ so, daß $V-V\subseteq U$. Also definiert $\mathfrak{U}_{\mathfrak{O}^{(2)}}(0)$ auf G' eine Gruppentopologie, die wir mit $\mathfrak{O}^{(2)}$ bezeichnen. Die in der Behauptung angegebenen Eigenschaften von $\mathfrak{O}^{(2)}$ sind evident.

Es gilt z.B. $\mathfrak{I}_1^{(2)}|G=\mathfrak{I}_0$, $\mathfrak{I}_{00}^{(2)}=\mathfrak{I}_{01}^{(2)}=$ triviale Topologie.

(2.9) *G' sei eine Untergruppe von R' und mit $G=G'\cap R$ sei $(G,\mathfrak{O})$ eine topologische Halbgruppe. Die Topologie $\mathfrak{O}(x)$ auf G, $x\in G$, die aus allen Mengen $(S-x)\cap G$ mit $S\in\mathfrak{O}$ besteht, ist eine Halbgruppentopologie auf G', die nicht feiner ist als $\mathfrak{O}$.*

Beweis. Überträgt man die von $\mathfrak{O}$ auf $[x,\infty)\cap G$, $x\geqq 0$ induzierte Topologie durch die Umkehrabbildung von $y\to y+x$ auf G, so entsteht gerade die Topologie $\mathfrak{O}(x)$. Die Eigenschaften dieser Topologie folgen aus der Stetigkeit der Addition auf G bezüglich $\mathfrak{O}$.

(2.10) *Der Durchschnitt $\mathfrak{D}\mathfrak{O}=\bigcap\{\mathfrak{O}(x)\colon x\in G\}$ ist eine Halbgruppentopologie auf G, mit der alle Translationen $y\to y+t$ Homöomorphismen von G auf das Bild von G darstellen.*

Beweis. $S\in\mathfrak{D}\mathfrak{O}$ ist gleichwertig zu

a) $S+x\in\mathfrak{D}\mathfrak{O}|G+x$ für alle $x\in G$.

Die Beziehung $S+t\in\mathfrak{D}\mathfrak{O}|G+t$ ist gleichwertig mit

b) $S+t+x\in\mathfrak{O}|G+t+x$ für alle $x\in G$.

Aber aus a) folgt b).

(2.11) *Genügt $\mathfrak{O}$ dem Trennungsaxiom T_1, so gilt dasselbe auch für $\mathfrak{D}\mathfrak{O}$.*

Beweis. Es seien u_1 und u_2 Elemente aus G mit $u_1<u_2$. Zu jedem Element x aus G suchen wir Mengen S_x und T_x derart, daß S_x+x eine $\mathfrak{O}$-offene Umgebung von u_1+x und T_x+x eine $\mathfrak{O}$-offene Umgebung von u_2+x bildet und daß $u_2+x\notin S_x+x$ und $u_1+x\notin T_x+x$ gilt. Die Mengen $S=\bigcup\{S_x\cap G\colon x\in G\}$ und $T=\bigcup\{T_x\cap G\colon x\in G\}$ sind $\mathfrak{D}\mathfrak{O}$-Umgebungen von u_1 bzw. u_2, und S enthält nicht u_2 und T enthält nicht u_1.

(2.12) Die aus $\mathfrak{O}$ abgeleiteten Topologien auf G und G' und die zwischen ihnen nachgewiesenen Relationen haben folgende Bedeutung: Anschaulich gesprochen ist $\mathfrak{O}^{(1)}$ die gröbste Verfeinerung und $\mathfrak{D}\mathfrak{O}$ die feinste Vergröberung von $\mathfrak{O}$ unter den Topologien, die G so homogenisieren, daß alle Translationen von G stetig und auf dem Bild umkehrbar stetig sind. Die Verschiedenheit von $\mathfrak{O}^{(1)}$ und $\mathfrak{D}\mathfrak{O}$ gibt ein anschauliches Maß, in welchem die Topologie $\mathfrak{O}$ für sehr große $r \in G$ gröber ist als für solche r, die in der Intervalltopologie nahe bei 0 liegen.

(2.13) P sei die additive Halbgruppe aller nichtnegativen ganzen Zahlen und $\mathfrak{P}$ eine beliebige Topologie auf P, bezüglich der $(P, \mathfrak{P})$ eine topologische Halbgruppe darstellt. Ist $(r_i : i \in N)$, $r_1 = r$ eine Erzeugendenfolge für eine submonogene Unterhalbgruppe $G \setminus \{0\}$ von R, zu der das Element 0 hinzugenommen wird, so gibt es einen algebraischen Isomorphismus von P auf $\langle r \rangle \cup \{0\}$. Überträgt man die Topologie $\mathfrak{P}$ auf $\langle r \rangle \cup \{0\}$ mit Hilfe dieses Isomorphismus, so wird insbesondere in $\langle r \rangle \cup \{0\}$ eine Filterbasis $\mathfrak{B}(0)$ definiert, die alle Umgebungen von 0 in H hinsichtlich der übertragenen Topologie enthält. Die Mengen $x + U$, $x \in G$, U offen in $\langle r \rangle \cup \{0\}$ aus $\mathfrak{B}(0)$ erzeugen auf G eine Halbgruppentopologie $\mathfrak{P}_G(r)$. Ist umgekehrt $\mathfrak{O}$ eine beliebige Halbgruppentopologie auf der von 0 und $(r_i : i \in N)$ erzeugten submonogenen Unterhalbgruppe G so wird auf $\langle r \rangle \cup \{0\}$ eine Topologie $\mathfrak{O}\langle r \rangle = \mathfrak{O} | (\langle r \rangle \cup \{0\})$ induziert, die dort mit der Verknüpfung verträglich ist. Es gelten dann die Beziehungen

$$(\mathfrak{O}\langle r \rangle)_G(r)^{(1)} \geqq \mathfrak{O}^{(1)} G, \qquad (\mathfrak{O}\langle r \rangle)_G(r)^{(2)} \geqq \mathfrak{O}^{(2)} G.$$

Ist für eine Halbgruppentopologie $\mathfrak{O}$ auf G die Topologie $\mathfrak{O} | \langle x \rangle$ mit $x \in G$ nicht diskret, so ist auch $\mathfrak{O} | \langle n \cdot x \rangle$ nicht diskret für alle natürlichen Zahlen n, denn die Abbildung $y \to n \cdot y$ ist stetig. Alle Aussagen dieser Nummer gelten entsprechend auch für G' an Stelle von G.

(2.14) *G sei eine submonogene Unterhalbgruppe von R. Auf G sei eine T_2-Topologie $\mathfrak{O}$ mit abzählbarer Basis für die offenen Mengen so gegeben, daß $(G, \mathfrak{O})$ eine topologische Halbgruppe bildet. Ist $x \in G$, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x)$ die Menge aller in G gegen x hinsichtlich der Topologie $\mathfrak{O}$ konvergenten Folgen F, also $\mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x) = \{F : F = (x_i : i \in N),\ x_i \in G,\ \lim_i x_i = x\}$. Es gelten dann die folgenden Aussagen:*

a) *Die Menge $\mathfrak{M}$ aller Folgen auf G bildet bezüglich der komponentenweisen Addition $(x_i : i \in N) + (y_i : i \in N) = (x_i + y_i : i \in N)$ eine kommutative reguläre Halbgruppe, und zwar eine Unterhalbgruppe der kommutativen Gruppe $\mathfrak{M}'$ aller Folgen der von G in R' erzeugten Untergruppe G' mit der komponentenweisen Addition.*

b) *Für alle $x, y \in G$, $(F_1, F_2) \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x) \times \mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(y)$ gilt immer $F_1 + F_2 \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x + y)$.*

c) *E sei die Menge aller Endomorphismen φ von $\mathfrak{M}$, für welche eine eineindeutige Abbildung $n \to m(n)$ von N in sich existiert, die bis auf eine endliche Menge ordnungserhaltend ist und mit der $\varphi(x_i : i \in N) = (x_{m(i)} : i \in N)$ gilt.*

ca) $\mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x)$ *enthält die konstante Folge* $(x_i\colon i\in N,\ x_i=x)$.

cb) $\mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x)$ *wird von allen Endomorphismen aus* E *in sich abgebildet.*

cc) *Liegt* F *nicht in* $\mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x)$, *so gibt es einen Endomorphismus* $\varphi\in E$ *derart, daß* $\psi(\varphi(F))\notin\mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x)$ *gilt für alle* $\psi\in E$.

Gibt es umgekehrt eine Abbildung $x\to\mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x)$ *von* G *in die Menge der Teilmengen von* $\mathfrak{M}$, *die den in* b) *und* c) *genannten Bedingungen genügt, so gibt es auf* G *eine Halbgruppentopologie* $\mathfrak{O}$, *die dem Trennungsaxiom* T_1 *genügt, und in der die Folgen aus* $\mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x)$ *gegen* x *konvergieren.*

Beweis. Die Bedingungen ca), cb) und cc) sind bekanntlich notwendig dafür, daß auf G eine Hausdorfftopologie mit abzählbaren Basen für sämtliche Umgebungsfilter existiert, hinsichtlich welcher die Folgen aus $\mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x)$ gegen x konvergieren. Die Bedingung b) ist eine Folge der Stetigkeit der Addition. Sind umgekehrt die Bedingungen b) und c) erfüllt, so definieren wir die Topologie $\mathfrak{O}$ als die Menge aller Komplemente der Mengen B mit $\widetilde{B}=B$; dabei ist $\widetilde{B}$ die Menge aller x, für die ein $F\in\mathfrak{F}_{\mathfrak{O}}(x)$ mit Elementen aus B existiert. So entsteht ein topologischer Raum, in dem jede Menge aus einem Punkt abgeschlossen ist, der also dem Trennungsaxiom T_1 genügt. Die abgeschlossene Hülle $\overline{B}$ einer Menge B in der Topologie $\mathfrak{O}$ ist gegeben durch $\overline{B}=B\cup\widetilde{B}\cup\widetilde{\widetilde{B}}\ldots$, denn es gilt $(B_1\cup B_2)\tilde{}=\widetilde{B}_1\cup\widetilde{B}_2$, woraus $\widetilde{\widetilde{B}}=\widetilde{B}\cup\widetilde{\widetilde{B}}\cup\widetilde{\widetilde{\widetilde{B}}}\ldots=\overline{B}$ und also erst recht $\overline{\overline{B}}=\overline{B}$ folgt. Die Abbildung $(x,y)\to x+y$ ist mit dieser Topologie stetig, denn wegen b) gilt $\widetilde{B}_1+\widetilde{B}_2\subseteqq(B_1+B_2)\tilde{}$, woraus $\overline{B}_1+\overline{B}_2\subseteqq(B_1+B_2)^-$ folgt. Sei $F=(x_i\colon i\in N)$ eine gegen x konvergente Folge, und sei $(y_i\colon i\in N)$ diejenige Folge, die nur aus den Elementen $x=y_i$ besteht, wenn in F nur endlich viele Elemente x_i von x verschieden sind und die in allen anderen Fällen aus F durch Weglassen aller mit x übereinstimmenden Folgenelementen besteht. Im ersten Fall konvergiert F sicher bezüglich $\mathfrak{O}$ gegen x, im zweiten Fall gilt $\{y_i\colon i\in N\}\tilde{}=\{y_i\colon i\in N\}\cup\{x\}$, woraus wegen $\{y_i\colon i\in N\}\tilde{}=\{y_i\colon i\in N\}^{\sim}$ auch $\{y_i\colon i\in N\}^-\ \{y_i\colon i\in N\}\cup\{x\}$ folgt, was auch für alle Teilfolgen von $(y_i\colon i\in N)$ gilt. Daher konvergiert F in der Topologie $\mathfrak{O}$ gegen x.

(2.17) G *sei eine um* 0 *erweiterte submonogene Unterhalbgruppe von* R *mit einer* T_2*-Topologie* $\mathfrak{O}$, *die mit der Addition verträglich ist und für jeden Umgebungsfilter eine abzählbare Basis hat. Die Folge der erzeugenden Elemente von* G *sei* $(1/p_i\colon i\in N)$, $p_i=n_1\ldots n_i$, $n_1=p_1=1$. *Dann gelten mit den Bezeichnungen von* (2.8) *und* (2.13) *die Beziehungen*

a) *Wenn* $\mathfrak{O}^{(2)}|\langle x\rangle$ *diskret ist für ein* $x\neq 0$, $x\in G$, *so gilt* $\mathfrak{O}^{(2)}\geqq\mathfrak{I}_0$.

b) $\mathfrak{O}^{(1)}\leqq(\mathfrak{O}\langle 1\rangle)_{G'}(1)^{(1)}$ *und* $\mathfrak{O}^{(2)}\leqq(\mathfrak{O}\langle 1\rangle)_{G'}(1)^{(2)}$.

c) *Ist* B *ein beschränktes Intervall auf* G *so gilt* $\mathfrak{I}_1|B\leqq\mathfrak{O}^{(1)}|B$ *und* $\mathfrak{I}_0|B\leqq\mathfrak{O}^{(2)}|B$.

Beweis. G' sei die von G in R' erzeugte submonogene Gruppe. Wir betrachten die topologische Gruppe $(G',\mathfrak{O}^{(2)})$. Jedes Element x von G' läßt

sich in eindeutiger Form darstellen als Summe $\Sigma\{n_i(x)/p_i : i \in N\}$ mit ganzen Zahlen $n_i(x)$, die den folgenden Bedingungen unterworfen sind:

a) $n_i(x) \neq 0$ höchstens für endlich viele $i \in N$.

b) Aus $x < 0$ folgt $n_0(x) \leqq 0$, $-n_i < n_i(x) \leqq 0$ für $i \in N$.

c) Aus $x \geqq 0$ folgt $n_0(x) \geqq 0$, $n_i > n_i(x) \geqq 0$ für $i \in N$.

Die Abbildung $p: x \to (n_i(x) : i \in N)$ ist eine eineindeutige Abbildung von G' in den Produktraum $P_{\mathfrak{P}} = \times\{Q_i : Q_0 = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}, Q_i = -n_i, \ldots, n_i$ für $i \in N\}$; die Räume Q_i seien dabei für $i \in N$ diskret topologisiert, während Q_0 mit einer Topologie $\mathfrak{P}$ versehen sei, mit der $(Q_0, \mathfrak{P})$ mit der Addition eine topologische Gruppe bildet. Die Abbildung p ist genau dann stetig, wenn $x \to n_0(x)$ stetig ist und zu jeder gegen $x \in G'$ konvergenten Folge $(x_i : i \in N)$ zu jeder natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl $m(n)$ existiert, so daß $q_i(x_j) = q_i(x)$ gilt für alle $j > m(i)$. Bezüglich der Intervalltopologie $\mathfrak{I}_0$ auf G' ist p genau dann stetig und sogar ein Homöomorphismus, wenn $\mathfrak{P}$ die diskrete Topologie ist, d.h. wenn auch schließlich $n_0(x_i)$ von i nicht mehr abhängt. Ist umgekehrt $\mathfrak{O}^{(2)}$ eine Topologie auf G', bezüglich der p stetig ist, wenn $\mathfrak{P}$ die diskrete Topologie ist, so ist $\mathfrak{O}^{(2)}$ notwendig feiner als die Intervalltopologie, d.h. es gilt dann $\mathfrak{I}_0 \leqq \mathfrak{O}^{(2)}$. Zum Beweis zeigen wir zunächst, daß für jede gegen $x \in G'$ konvergente Folge $(x_i : i \in N)$ auf G' stets alle $n_i(x_j)$ für $i \in N$ für hinreichend große j von j nicht mehr abhängen. Angenommen, für eine Folge $(x_i : i \in N)$, die gegen x konvergiere und für eine feste natürliche Zahl k habe die Folge $(n_k(x_j) : j \in N)$ keinen konstanten Endabschnitt. Wir können o.B.d.A. $x = 0$ annehmen. Da wir erforderlichenfalls am Nullpunkt spiegeln und eine Teilfolge auswählen können, bedeutet auch die Annahme $x_i \geqq 0$ und $q_k(x_i) = r > 0$ keine Einschränkung. Wir können dann x_i in der Form $x_i = r/p_k + y_i$ mit $y_i \in G'$, $y_i \geqq 0$ darstellen. Da die Translationen bezüglich der Topologie $\mathfrak{O}^{(2)}$ Homöomorphismen sind, konvergiert die Folge $(y_i : i \in N)$ gegen ein $y \in G$. Es müßte dann $0 = r/p_k + y \geqq r/p_k > 0$ gelten, und dies ist ein Widerspruch. Da in unserem Fall $\mathfrak{P}$ diskret angenommen war, ist auch die Folge $(n_0(x_i) : i \in N)$ schließlich konstant. Konvergiert eine Folge $(x_i : i \in N)$ in der Topologie $\mathfrak{O}^{(2)}$ dann auch in der Intervalltopologie, da die Abbildung p^{-1} unter den jetzigen Umständen bezüglich J_0 auf G' stetig ist. Dann ist aber $\mathfrak{I}_0 \leqq \mathfrak{O}^{(2)}$. Ist B ein beschränktes Intervall in G', das 0 enthält und ist $(x_i : i \in N)$ eine auf B gegen $x \in B$ konvergente Folge, so ist außer den Folgen $(n_i(x_j) : j \in N)$, $i \in N$ auch die Folge $(n_0(x_j) : j \in N)$ schließlich konstant, da die Menge $n_0(B)$ endlich ist. Die Abbildung p von B in $P_{\mathfrak{P}}$ ist dann für alle $\mathfrak{P}$ stetig, und die von $\mathfrak{O}^{(2)}$ auf B induzierte Topologie ist nie gröber als die Intervalltopologie $\mathfrak{I}_0$. Die bislang bewiesenen Tatbestände lassen sich sofort zu der folgenden Aussage verschärfen: Die Topologie $\mathfrak{O}^{(2)}$ ist genau dann nicht gröber als die Intervalltopologie $\mathfrak{I}_0$, wenn für jede $\mathfrak{O}^{(2)}$-Nullfolge $(x_i : i \in N)$ die Folge $(n_0(x_i) : i \in N)$ schließlich konstant gleich 0 ist, oder, was dasselbe bedeutet, beschränkt ist. Ist dies aber nicht der Fall, so induziert $\mathfrak{O}^{(2)}$ auf der von $r_1 = 1/p_1 = 1$ erzeugten Untergruppe eine nichtdiskrete Topologie $\mathfrak{P} = \mathfrak{O}^{(2)}|\langle 1 \rangle$. Die Abbildung p von $(G', \mathfrak{O})$ in $P_{\mathfrak{P}}$ ist dann stetig: Setzen wir für eine beliebige Folge $(x_i : i \in N)$

immer $n_0(x_i)=y_i$ und $x_i-y_i=z_i$, so ist nach dem Bewiesenen für jede $\mathfrak{O}^{(2)}$-Nullfolge die Folge $(z_i: i\in N)$ eine $\mathfrak{O}^{(2)}$- und eine $\mathfrak{P}_{G'}(1)$-Nullfolge, und $(y_i: i\in N)$ ist eine $\mathfrak{P}$-Nullfolge auf Q_0.

Die Topologie $\mathfrak{O}^{(2)}$ stimmt genau dann mit $\mathfrak{P}_{G'}(1)$ überein, wenn für alle $\mathfrak{O}^{(2)}$-Nullfolgen $(x_i: i\in N)$ eine feste natürliche Zahl i_0 existiert, so daß $n_j(x_i)=0$ für alle $j\in N$ und $i>i_0$ gilt. Andernfalls gäbe es eine Teilfolge $(x_i: i\in M\subseteqq N)$ und eine Folge $(j_i: i\in M)$ natürlicher Zahlen derart, daß $n_{j_i}(x_i)\neq 0$ für $i\in M$ gilt, und die Folge $(x_i: i\in N)$ tritt aus jeder $\mathfrak{P}_{G'}(1)$-Umgebung von 0 immer wieder heraus. Im allgemeinen werden in der Topologie $\mathfrak{O}^{(2)}$ mehr Nullfolgen vorhanden sein als in der Topologie $\mathfrak{P}_{G'}(1)$, so daß jene also gröber ist als diese. So ist z.B. die Topologie $\mathfrak{I}$ (vgl. (2.6)) echt gröber als die aus $\mathfrak{I}$ abgeleitete Topologie $\mathfrak{P}_{G'}(1)$.

(2.18) *Die Bezeichnungen der vorigen Nummer seien beibehalten. Auf G existiert eine nichtdiskrete Topologie $\mathfrak{H}$, die echt feiner ist als die Intervalltopologie und bezüglich der die Folge $(1/p_i: i\in N)$ gegen 0 konvergiert. Es gibt genau eine feinste Topologie dieser Art.*

Beweis. $\mathfrak{M}'$ sei die abelsche Gruppe aller Folgen von Elementen aus G' mit der komponentenweisen Addition; E' sei der von allen Endomorphismen von $\mathfrak{M}'$ erzeugte Ring, die die Fortsetzung von den Endomorphismen aus E von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}'$ bilden. Mit diesem Ring als Operatorenbereich bildet $\mathfrak{M}'$ einen E'-Modul. Wir definieren $\mathfrak{H}$ durch die Angabe des E'-Moduls $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}(0)$ aller auf G' gegen 0 konvergenten Folgen. Eine Folge $X=(x_i: i\in N)$ gehöre genau dann zu $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}(0)$, wenn es eine natürliche Zahl $C(X)$ derart gibt, daß $n_i(x_j)=0$ für alle $j\geqq C(X)+i$ gilt. Die Eigenschaften $C(X)=C(-X)$ und $C(X+Y)\leqq \max\big(C(X), C(Y)\big)+1$ sind leicht nachzuprüfen. Da $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}(0)$ bei allen E'-Endomorphismen als Ganzes invariant bleibt, ist $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}(0)$ ein E'-Modul. Für die durch $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}(0)$ erklärte Folgentopologie gilt speziell $\tilde{A}=\tilde{\bar{A}}$, also $A=\bar{A}$; mit dem Nachweis dieser Eigenschaft ist dann gezeigt, daß $\mathfrak{H}$ echt feiner ist als die Intervalltopologie, denn es gibt $\mathfrak{I}_0$-Nullfolgen, die nicht bezüglich der Topologie $\mathfrak{H}$ gegen 0 konvergieren. Es sei also A eine beliebige Teilmenge aus G' und x ein Element aus $\tilde{\bar{A}}$, d.h. es gebe eine Folge $X=(x_i: i\in N)\in\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}(0)$ mit $n_i(x_j)=0$ für $j\geqq C(X)+i$, und es gelte $x+x_i\in\bar{A}$ für $i\in N$. Dann existieren Folgen $X_i=(x_{ij}: j\in N)\in\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}(0)$ mit $n_k(x_{ij})=0$ für $j\geqq C(X_i)+k$, so daß $x+x_i+x_{ij}\in A$ für $i,j\in N$ erfüllt ist. Nun sei $(m_i: i\in N)$ eine Folge natürlicher Zahlen mit der Eigenschaft, daß $m_i-C(X_i)$ größer ist als i. Nun setzen wir $y_i=x_{im_i}$. Aus $i\geqq k$ folgt dann $m_i-C(X_i)>i\geqq k$ und $m_i>C(X_i)+k$ und daraus $n_k(y_i)=0$. Also gehört die Folge $Y=(y_i: i\in N)$ zu $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}(0)$ und $Z=(z_i: i\in N)$ mit $z_i=x_i+y_i$ gehört ebenfalls zu $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}(0)$; außerdem aber liegt $x+z_i$ in A für alle $i\in N$, weshalb x in $\tilde{A}$ liegt, und das war zu zeigen. Die feinste Topologie $\mathfrak{H}_0$, hinsichtlich welcher die Folge $(1/p_i: i\in N)$ gegen 0 konvergiert, ist diejenige Topologie, die aus dem von $P=(1/p_i: i\in N)$ erzeugten E'-Modul $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}_0}(0)$ als Menge der Nullfolgen hervorgeht.

Die wichtigsten Resultate dieses Paragraphen fassen wir in dem folgenden Satz zusammen:

Satz II:

(2.19) *G' sei eine submonogene Untergruppe* [vgl. (1.2)] *von R', der additiven Gruppe aller reellen Zahlen und G sei gleich $G' \cap R$, wo R die additive Halbgruppe aller nichtnegativen reellen Zahlen bezeichnet. $\mathfrak{T}$ sei eine mit der Addition von G verträgliche Topologie. $\mathfrak{J}_0'$ sei die Intervalltopologie auf G' und $\mathfrak{J}_{01}'$ diejenige Topologie auf G', bezüglich der jede Obermenge von $x+G$, $x \in G'$ eine Umgebung von x darstellt. Dann gelten folgende Aussagen:*

a) *Unter allen Halbgruppentopologien $\mathfrak{T}'$ auf G, bezüglich der die sämtlichen Translationen $x \to x+t$, $t \in G$ Homöomorphismen von G auf $G+t$ mit der dort von $\mathfrak{T}'$ induzierten Topologie bilden, gibt es eine gröbste Topologie $\mathfrak{T}^{(1)}$, die nicht gröber ist als $\mathfrak{T}$ und eine feinste Topologie $\mathfrak{D}\mathfrak{T}$, die nicht feiner ist als $\mathfrak{T}$. Wenn $\mathfrak{T}$ dem Trennungsaxiom T_1 genügt, dann trifft dies auch für $\mathfrak{T}^{(1)}$ und $\mathfrak{D}\mathfrak{T}$ zu.*

b) *Zu jeder Halbgruppentopologie $\mathfrak{T}$ auf G gibt es eine wohlbestimmte feinste Gruppentopologie $\mathfrak{T}^{(2)}$ auf G' (bezüglich der also auch die Bildung des Inversen stetig vonstatten geht), die gröber ist als $\mathfrak{T}^{(1)}$. Ist die aus dem Punkt 0 bestehende Menge in G bezüglich $\mathfrak{T}^{(2)}$ abgeschlossen, dann ist $\mathfrak{T}^{(2)}$ Hausdorffsch.*

c) *Der Umgebungsfilter von 0 bezüglich $\mathfrak{T}^{(2)}$ habe eine abzählbare Basis. Dann induziert $\mathfrak{T}^{(2)}$ auf jeder monogenen Untergruppe eine nichtdiskrete Topologie, oder $\mathfrak{T}^{(2)}$ ist nicht gröber als die Intervalltopologie $\mathfrak{J}_0$. Auf jedem beschränkten Intervall von G' induziert $\mathfrak{T}^{(2)}$ immer eine Topologie, die feiner ist als die Intervalltopologie. Es gibt auf G' nichtdiskrete Gruppentopologien, die echt feiner sind als die Intervalltopologie und unter diesen eine feinste; eine Folge von erzeugenden Elementen der submonogenen Gruppe G' kann dabei so vorgegeben werden, daß sie in diesen Topologien gegen 0 konvergiert.*

§ 3. Submonogene Halbgruppen in topologischen kompakten Halbgruppen

(3.1) (*Wiederholung einer Definition aus* (2.4)). *Die Intervalltopologie auf der Menge R aller nichtnegativen reellen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathfrak{J}_0$; als offene Mengen enthält sie alle Vereinigungen von Intervallen (r, s) mit $r<s$ und Intervallen $[0, s)$ mit $0<s$. Die Topologie, die als offene Mengen die sämtlichen Vereinigungen von Intervallen $[r, s)$ mit $r<s$ enthält, nennen wir Halbintervalltopologie und bezeichnen sie mit $\mathfrak{J}_1$.*

(3.2) *Ein topologischer Raum $(E, \mathfrak{O})$ heißt kompakt, wenn in ihm der Satz von Heine-Borel-Lebesgue gilt und der Raum Hausdorffsch ist* [vgl. (2.7)]. *Ein topologischer Raum heißt lokalkompakt, wenn er Hausdorffsch ist und jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt. Ein topologischer Raum heißt folgenkompakt, wenn er Hausdorffsch ist und jede (abzählbare) Folge von Punkten einen Häufungspunkt hat; gilt dies nur für eine Umgebung eines jeden Punktes, so heißt der Raum lokal folgenkompakt. Jeder kompakte Raum ist folgenkompakt, aber das Umgekehrte ist nicht richtig.*

(3.3) Setzt man in einer lokalkompakten, nicht kompakten topologischen Gruppe H die Verknüpfung $(x, y) \to xy$ auf die Einpunktkompaktifizierung $H \cup \{a\}$ fort, indem man $xa = ax = a$ für alle $x \in H \cup \{a\}$ festsetzt, so entsteht dabei nie eine topologische Halbgruppe; das sofort gegenwärtige Beispiel der durch einen Punkt abgeschlossenen Zahlengeraden oder der Riemannschen Zahlenkugel läßt sich sofort auf den allgemeinsten Fall ausweiten. Immerhin ist für eine topologische Gruppe die so definierte Abbildung $(x, y) \to xy$ von $(H \cup \{a\}) \times (H \cup \{a\})$ auf $H \cup \{a\}$ stetig außer im Punkt (a, a). Falls H nur eine topologische Halbgruppe ist, braucht dies nicht mehr richtig zu sein. (Beispiel: Wird R so mit einer Topologie ausgestattet, daß jeder Punkt aus $[0, 1)$ eine offene Menge bildet und auf $[1, \infty)$ die Topologie von den Intervallen (r, s), $r < s$ erzeugt wird, so ist die Addition auf R hinsichtlich dieser Topologie stetig. [Mit den Bezeichnungen von (2.5) und $\mathfrak{D}$ als der diskreten Topologie auf R ist gerade $\mathfrak{D}1\mathfrak{I}_0$ die so definierte Topologie.] Ist $R \cup \{a\}$ die Einpunktkompaktifizierung der damit erklärten lokalkompakten topologischen Halbgruppe R, so konvergiert die Folge $(1/i : i \in N)$ gegen a, aber die Folge $(2 + \frac{1}{i} : i \in N)$ konvergiert gegen 2 und nicht gegen $2 + \lim 1/i = a$). In diesen Fällen sind die Unstetigkeitspunkte jedenfalls in der Menge $\big((H \cup \{a\}) \times \{a\}\big) \cup \big(\{a\} \times (H \cup \{a\})\big)$ enthalten. Um später den Fall nicht kompakter lokalkompakter topologischer Gruppen in unsere Betrachtungen einbeziehen zu können, greifen wir zu der folgenden Definition:

(3.4) *Ein kompakter topologischer Raum $(K, \mathfrak{T})$ heißt eine fasttopologische kompakte Halbgruppe, wenn folgende Aussagen gelten:*

a) *Auf K ist eine assoziative Verknüpfung überall erklärt. Die Verknüpfung wird multiplikativ geschrieben: $(x, y) \to xy$.*

b) *Es gibt höchstens ein Element $a \in K$ mit den folgenden Eigenschaften:*

ba) *Es gilt $a^2 = a$, d.h. a ist ein idempotentes Element.*

bb) $(K - \{a\})(K - \{a\}) \subseteq K - \{a\}$.

bc) *$(x, y) \to xy$ ist mit Ausnahme des Punktes (a, a) überall stetig.*

a heißt Ausnahmepunkt. Ist ein Ausnahmepunkt wirklich vorhanden, dann nennen wir K eigentlich fasttopologisch; andernfalls ist K natürlich topologisch, d.h. jede topologische kompakte Halbgruppe ist insbesondere fasttopologisch.

(3.5) *K sei eine topologische Halbgruppe, die den folgenden Bedingungen genügt:*

a) *K ist lokalkompakt aber nicht kompakt.*

b) *Sind W_1 und W_2 kompakte Teilräume von K, so sind $\{x : xW_1 \subseteq W_2\}^-$ und $\{x : W_1 x \subseteq W_2\}^-$ kompakte Teilräume von K.*

Dann ist die Einpunktkompaktifizierung $K \cup \{a\}$ von K mit der durch $xa = ax = a$ für alle $x \in K \cup \{a\}$ erweiterten Multiplikation eine kompakte fasttopologische Halbgruppe.

Die Bedingung b) *folgt aus der Bedingung*

c) *Die Translationen* $f_d\colon x \to xd$ *bzw.* $g_s\colon x \to sx$ *sind Homöomorphismen von* K *in* K *und die Abbildungen* $(x, d) \to f_d^{-1}(x)$ *und* $(x, s) \to g_s^{-1}(x)$ *sind stetig auf* $f_d(K) \times K$ *bzw.* $g_s(K) \times K$.

Hinreichend für die Gültigkeit von c) *ist*

d) K *ist Unterhalbgruppe einer lokalkompakten topologischen Gruppe.*

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß die Abbildung $(x, y) \to xy$ z.B. im Punkt (a, b), $b \neq a$ stetig ist. Dazu müssen wir nach Vorgabe eines kompakten Teilraums B von K einen kompakten Teilraum B' und eine Umgebung V von b so finden, daß $(K \setminus B')\, V \cap K \subseteq K \setminus B$ oder $(K \setminus B')\, V \cap B = \emptyset$ gilt. Ist aber V eine kompakte Umgebung von b, so ist die Menge $M(V)$ der x mit $xV \subseteqq B$ relativ kompakt in K nach b) und es gilt $\left(K \setminus \overline{M(V)}\right) V \cap B = \emptyset$. Dann ist $B' = \overline{M(V)}$ der verlangte kompakte Teilraum von K. Wegen $\{x\colon xW_1 \subseteqq W_2\} = f_{W_1}^{-1}(W_2)$ und $\{x\colon W_1 x \subseteqq W_2\} = g_{W_1}^{-1}(W_2)$ folgt b) aus c), und daß c) aus d) folgt, ist trivial.

(3.6) *Ein stetiger algebraischer Homomorphismus einer fasttopologischen kompakten Halbgruppe* K *in eine fasttopologische Halbgruppe* K' *sei eine stetige Abbildung* f, *die überall mit der Verknüpfung verträglich ist, d.h. die Identität* $f(xy) = f(x) f(y)$ *befriedigt.*

(3.7) Es ist bequem, für das Folgende eine technisch formale Übereinkunft der folgenden Art zu treffen: *Ist* K *eine fasttopologische kompakte Halbgruppe, so bezeichne* A_K *(oder auch bloß* A, *wenn Verwechslungen nicht zu befürchten sind) die leere Menge immer, wenn* K *topologisch ist, und die Menge* $\{a\}$ *bestehend aus dem Ausnahmepunkt, wenn* K *eigentlich fasttopologisch ist. Für alle Teilmengen* L *von* K *sei*

$$\underline{L} = L \setminus A_K = \begin{cases} L, & \text{wenn } K \text{ kompakt topologisch ist} \\ L \cap (K \setminus \{a\}), & \text{wenn } K \text{ eigentlich fasttopologisch ist.} \end{cases}$$

$L \to \underline{L}$ *ist also der naheliegende Verbandshomomorphismus des Verbandes der Teilmengen von* K *auf den Verband der Teilmengen von* $\underline{K} = K \setminus A_K$.

(3.8) $(K, \mathfrak{O})$ *oder kurz* K *sei eine kompakte fasttopologische Halbgruppe;* H *sei eine submonogene Unterhalbgruppe von* K, *die in* K *dicht sei; es gebe nämlich eine submonogene Unterhalbgruppe* G *der additiven Halbgruppe* $R \setminus \{0\}$ *aller positiven reellen Zahlen und einen algebraischen Homomorphismus* f *von* G *auf* H. *(Diese Bezeichnungen werden im ganzen Paragraphen festgehalten.) Wir setzen*

a) $C = \bigcap \left\{ \overline{f\left((0, r) \cap G\right)}\colon r > 0 \right\}$,

b) $D = \bigcap \left\{ \overline{f\left((r, \infty) \cap G\right)}\colon r \in R \right\}$.

In dem kompakten Raum K *ist* $D \neq \emptyset$, *und* $C = \emptyset$ *gilt dann und nur dann, wenn* G *monogen ist, also ein* $r > 0$ *existiert, so daß* $(0, r) \cap G = \emptyset$ *ist. Grundlegend für alles folgende ist die Behauptung:*

$\underline{C}$ *und* $\underline{D}$ *sind leer oder lokalkompakte topologische Untergruppen von* $\underline{K}$. *Falls* $\underline{C} \neq \emptyset$ *ist, setzen wir* f *stets durch* $f(0) = 1$ *(= Neutralelement von* $\underline{C}$*) auf*

$G \cup \{0\}$ *fort. Beim Beweis dieser Behauptung benützen wir den folgenden Hilfssatz*

(3.9) $C = \{x$: Es gibt eine Nullfolge $(r_i: i \in N)$ auf G hinsichtlich der Intervalltopologie $\mathfrak{I}_0$ mit $x = \lim_i f(r_i)\}$,

$D = \{x$: Es gibt eine über alle Grenzen wachsende Folge $(r_i: i \in N)$ auf G mit $x = \lim_i f(r_i)\}$.

Anmerkung: *Der Ausdruck Nullfolge bedeutet hinfort im ganzen Paragraphen, falls nicht ausdrücklich anders betont, Nullfolge bezüglich der Intervalltopologie* $\mathfrak{I}_0$ *auf* G.

Beweis. Wir führen den Beweis für C; der zweite Teil des Hilfssatzes wird genau so bewiesen. Die in der Behauptung auf der rechten Seite der zu beweisenden Gleichung stehende Menge heiße vorübergehend C'. Die Beziehung $C' \subseteq C$ ist trivial. Es sei nun umgekehrt x ein Element von C. Dann gibt es eine Nullfolge $(r_i: i \in N)$ auf G derart, daß zu jedem $i \in N$ eine Nullfolge $(r_{ij}: j \in N)$ auf $(0, r_i) \cap G$ mit $x = \lim_j f(r_{ij})$ existiert, denn G ist abzählbar. Wir weisen nun die Existenz von Folgen $(n_k: k \in N)$ und $(m_k: k \in N)$ natürlicher Zahlen nach, mit welchen die Beziehung $\lim_k f(r_{n_k m_k}) = x$ erfüllt und $(n_k: k \in N)$ unbeschränkt ist. Dann liegt aber x in C' und es gilt $C = C'$. Nun sei also $\mathfrak{B}$ eine Basis für den Filter der Umgebungen von x. Zu $i \in N$ und $U \in \mathfrak{B}$ wählen wir ein Element $r(i, U)$ aus der Folge $(r_{ij}: j \in N)$ derart, daß $r(i, U)$ in U liegt; dies ist möglich, da $f(r_{ij})$ für wachsende j gegen x konvergiert. Auf der Menge M aller Paare $\big(i, r(i, U)\big)$ definieren wir eine Filterordnung $\prec$, indem wir $\big(i, r(i, U)\big) \prec \big(i', r(i', U')\big)$ genau dann setzen, wenn $i < i'$ und $U \subset U'$ gilt. M wird dadurch zu einer abzählbaren, gerichteten Menge, in der es eine Folge $\big((i_k, s_k): k \in N\big)$ mit der Eigenschaft gibt, daß zu jedem $\big(i, r(i, U)\big) \in M$ ein $k \in N$ mit $\big(i, r(i, U)\big) \prec (i_k, s_k)$ existiert. Das Netz der Elemente $F\big((i, r(i, U)\big) = f\big(r(i, U)\big)$ konvergiert gegen x, also auch die Folge $\big(f(s_k): k \in N\big)$. Die Folge $(s_k: k \in N)$ ist aber eine Folge $(r_{n_k m_k}: k \in N)$ der verlangten Art.

Beweis von (3.8). x und y seien beliebige Elemente aus C. Es gibt dann Nullfolgen $(r_i: i \in N)$ und $(s_i: i \in N)$ auf G mit $x = \lim f(r_i)$ und $y = \lim f(s_i)$. Wir können o.B.d.A. $r_i < s_i$ annehmen, denn zu jedem s_i gibt es eine natürliche Zahl k_i derart, daß $r_{k_i} < s_i$ gilt, weil die r_i eine Nullfolge bilden; eine Umnumerierung der Folge $(r_{k_i}: i \in N)$ liefert dann die gewünschte Normierung. Von dieser Normierungsmöglichkeit werden wir auch weiterhin gelegentlich Gebrauch machen. Die Folge $(s_i - r_i: i \in N)$ ist eine Nullfolge; da C kompakt ist, können wir ferner auch $c = \lim f(s_i - r_i) \in C$ annehmen, da wir gegebenenfalls eine konvergente Teilfolge auswählen können. Falls nun nicht $x = c = a$ ist, gilt $xc = \lim f(r_i) \lim f(s_i - r_i) = \lim f(r_i)\, f(s_i - r_i) = \lim f(s_i) = y$, denn die Multiplikation ist höchstens in (a, a) unstetig. Wenn aber x und y von a verschieden sind, so ist sicher auch c von a verschieden, denn es gilt $xa = a$. Demnach ist in $\underline{C}$ jede Gleichung der Form $xc = y$ nach $c \in \underline{C}$ lösbar, d.h. $\underline{C}$ ist eine lokalkompakte abelsche Gruppe mit stetiger Multiplikation. Diese ist dann sogar topologisch, d.h. die Bildung des Inversen $x \to x^{-1}$ ist stetig [5].

Die Tatsache, daß K fasttopologisch ist, d.h. daß die Multiplikation auch in den Punkten (x, a) und (a, x) stetig ist, sofern nur $x \neq a$ gilt, ist beim Beweis entscheidend ausgenützt worden. Im weiteren Verlauf der Untersuchung werden wir feststellen, daß für scharf submonogene Halbgruppen G die Gruppe $\underline{C}$ entweder leer oder aber kompakt ist, so daß dann in diesem Fall $\underline{C} = C$ und $A \not\subset C$ gilt.

(3.10) *Es sei $C \neq \emptyset$ und $C \neq \{a\}$; mit C_0 sei eine abgeschlossene Untergruppe von $\underline{C}$ bezeichnet. Dann liegt jedes Element von K in genau einer in $\underline{K}$ abgeschlossenen Untermenge der Form $C_0 x$. Auf diese Weise wird K in Äquivalenzklassen $\varrho(x) = C_0 x$ zerlegt, und die Abbildung $x \to \varrho(x)$ ist ein Homomorphismus auf den Restklassenraum K/ϱ, den wir auch mit K/C_0 bezeichnen, und auf dem die Quotiententopologie eingeführt ist. Das Bild $\varrho(\underline{K}) = \underline{K}/C_0$ von $\underline{K}$ ist eine lokalkompakte topologische Halbgruppe, in der die submonogene Halbgruppe $\varrho(f(G))$ dicht ist.*

Die Menge $\underline{C}^* = \bigcap \{\overline{\varrho(f((0, r) \cap G))} : r > 0\}$ in $\underline{K}/C_0$ ist gleich $\varrho(\underline{C})$.

Beweis. Jedes Element x von K liegt in einer Menge der Form yC_0: Für $x = a$ ist dies im Fall einer eigentlich fasttopologischen Halbgruppe K trivial mit $y = a$. Es sei nun aber $x \in \underline{K}$. Dann existiert eine Folge $(r_i : i \in N)$ auf G mit $x = \lim f(r_i)$. Es sei 1 das Neutralelement von $\underline{C}$ (und von C_0), und es gelte $1 = \lim f(e_i)$ mit einer geeigneten Nullfolge $(e_i : i \in N)$ auf G. Nach einem eventuellen Übergang zu einer Teilfolge können wir $e_i < r_i$ und wegen der Kompaktheit von K auch die Existenz von $\lim f(r_i - e_i) = y$ annehmen. Wegen $1 \notin A_K$ gilt $y1 = \lim f(r_i - e_i) \lim f(e_i) = \lim f(r_i - e_i) f(e_i) = x$. Da aber x in $\underline{K}$ liegt, liegt auch y in $\underline{K}$. Auf dem Teilraum yC_0 wirkt C_0 durch Rechts- (und infolge der Kommutativität auch durch Links-) multiplikation transitiv, und 1 wirkt als identische Abbildung; also gilt $x1 = 1x = x$ für alle $x \in K$; insbesondere ist die in (3.8) definierte Fortsetzung von f auf $G \cup \{0\}$ ein algebraischer Homomorphismus. Die Mengen $\varrho(x) = C_0 x$ definieren eine Äquivalenz- und sogar eine Kongruenzklassenzerlegung: Es sei $C_0 x \cap C_0 y \neq \emptyset$; es gebe also Elemente c und c' mit $cx = c'y$, $c, c' \in C_0$. Dann gilt $y = c'^{-1} c x \in C_0 x$ und $C_0 y \subseteq C_0 x$, woraus aus Symmetriegründen sofort $C_0 y = C_0 x$ folgt; die Klassen $\varrho(x)$ sind die Transitivitätssysteme (orbits) der auf K wirkenden Transformationsgruppe C_0. Daß es sich bei der Äquivalenzrelation ϱ um eine Kongruenzrelation handelt, die der Identität $\varrho(x)\,\varrho(y) = \varrho(xy)$, also $C_0 x \cdot C_0 y = C_0 xy$ genügt, folgt unmittelbar aus der Gruppeneigenschaft von C_0 und der Kommutativität von K. Wird auf K/ϱ die Quotiententopologie betrachtet, so ist nach den Definitionen $x \to \varrho(x)$ ein Homomorphismus von K auf K/ϱ [vgl. (2.3)]; man beachte daß K/ϱ nicht Hausdorffsch zu sein braucht; und zwar ist K/ϱ genau dann Hausdorffsch, wenn C_0 kompakt ist, was wir hier ohne Beweis anführen. Wir zeigen jetzt, daß die Einschränkung von ϱ auf $\underline{K}$ eine offene Abbildung ist; da keine Verwechslungen zu befürchten sind, bezeichnen wir weiterhin diese Einschränkung ebenfalls mit ϱ. Es genügt, nachzuweisen, daß UC_0 ein offener Teilraum in $\underline{K}$ ist, wenn immer U in $\underline{K}$ offen ist. Ist $x \in UC_0$, so gibt es ein $c \in C_0$ so, daß $x \in Uc$. Dann aber gilt

$xc^{-1} \in U1 = U$. Infolge der Stetigkeit der Abbildung $y \to yc^{-1}$ gibt es eine Umgebung V von x derart, daß $Vc^{-1} \subseteq U$, was $V1 = V \subseteq Uc$ und damit die Offenheit von UC_0 nach sich zieht. Wir beweisen jetzt die Gültigkeit des Hausdorffschen Trennungsaxioms in $\underline{K}/\varrho$. Es sei $x \notin C_0 y$. Angenommen für alle Umgebungen U von x bzw. V von y gebe es Elemente $c_U u_U = c_V v_V$ in $C_0 U \cap C_0 V$ mit $u_U \in U$, $v_V \in V$ und c_U, $c_V \in C_0$. Durchlaufen dann die Umgebungen U und V die Umgebungsfilter von x bzw. y, so gilt $\lim x_U = x$, $\lim y_V = y$ (denn K ist Hausdorffsch), und wegen der Kompaktheit von K können wir auch $\lim c_U^{-1} c_V = c$ in C annehmen. Wegen $y \notin A_K$ gilt $x = cy$, woraus zusammen mit $x \in \underline{K}$ schließlich $y \in \underline{K}$ folgt. Nun ist aber C_0 abgeschlossen in $\underline{K}$, also liegt c in C_0 (da es ja nicht gleich a sein kann) und x in $C_0 y$ im Widerspruch zur Annahme. Damit ist die Gültigkeit des Axioms T_2 für $\underline{K}/C_0$ nachgewiesen. Da eine kompakte Umgebung U aus $\underline{K}$ auf eine kompakte Umgebung von $\underline{K}/C_0$ abgebildet wird, ist $\underline{K}/C_0$ lokalkompakt; daß $\varrho\big(f(G)\big)$ in $\underline{K}/C_0$ dicht ist, ist unmittelbar einzusehen. Die Einpunktkompaktifizierung $\varrho(\underline{K}) \cup \{a'\}$ von $\varrho(\underline{K})$ ist mit der üblichen Festsetzung $xa' = a'x = a'$ für alle $x \in \varrho(\underline{K}) \cup \{a'\}$ jedenfalls dann eine fasttopologische Halbgruppe, wenn C_0 kompakt ist. (Man beachte, daß diejenige Abbildung von $\varrho(\underline{K}) \cup \{a'\}$ auf $\varrho(K)$, die a' auf $\varrho(a)$ abbildet und auf $\varrho(\underline{K})$ die identische Abbildung ist, stetig ist, aber i.a. nicht ihre Umkehrabbildung; dies trifft genau in dem schon oben kurz erwähnten Fall zu, daß C_0 kompakt und dann K/ϱ Hausdorffsch ist). Es sei zum Beweis $(x_i : i \in L)$ ein Netz mit einer gerichteten Indexmenge L, das gegen eine Element $x \in \varrho(\underline{K})$ konvergiert, und $(y_i : i \in L')$ sei ein gegen a' konvergentes Netz. Ferner sei u ein Punkt aus $\varrho^{-1}(x)$ und U eine kompakte Umgebung von u in $\underline{K}$. Dann existiert für jedes hinreichend große $i \in L$ ein $u_i \in U$ mit $\varrho(u_i) = x_i$. O.B.d.A. sei $\lim_L u_i = u$. Ferner bestimmen wir ein Netz $(v_i : i \in L')$ mit $\varrho(v_i) = y_i$ und $v = \lim_L v_i \in K$; dabei haben wir von der Möglichkeit der Auswahl eines auf dem kompakten Raum K konvergenten Teilnetzes Gebrauch gemacht. Notwendigerweise ist nun $v = a$. Es sei, eventuell nach Auswahl einer geeigneten gerichteten Teilmenge L'' in dem Produkt $L \times L'$, die Beziehung $\lim\big(x_i y_j : (i,j) \in L''\big) = z \in \varrho(\underline{K}) \cup \{a'\}$ erfüllt. Wäre nun $z \in \varrho(\underline{K})$, $w \in \varrho^{-1}(z)$, so würde dies bedeuten, daß mit einer kompakten Umgebung V von w in $\underline{K}$ für alle hinreichend großen $(i,j) \in L''$ stets $u_i v_j C_0 \subseteq V C_0$ oder auch $u_i v_j \in V C_0$ gelten müßte. Nun ist aber $V C_0$ als stetiges Bild des kompakten Produktes $V \times C_0$ kompakt und das Netz $\big(u_i v_j : (i,j) \in L''\big)$ verliefe schließlich ganz in einem kompakten Teilraum von $\underline{K}$, was aber zur Gültigkeit von $\lim\big(u_i v_j : (i,j) \in L''\big) = \lim_L u_i \lim_{L'} v_j = uv = ua = a$ im Widerspruch steht. Also ist die Multiplikation auf $\underline{K}/C_0 \cup \{a'\}$ in der Tat stetig außer vielleicht im Punkt (a', a').

Um die Behauptung über $\underline{C}^*$ nachzuweisen, genügt es, daß wir die Beziehung $\bigcap \{\varrho\big(f((0,r) \cap G)\big)^- : r > 0\} \subseteq \varrho(\underline{C})$ nachprüfen; daß $\varrho(\underline{C})$ in $\varrho(\underline{C}^*)$ enthalten ist, ist trivial. Es sei $x = \lim \varrho\big(f(r_i)\big) \in \varrho(\underline{K})$ mit einer Nullfolge $(r_i : i \in N)$ auf G. Zu jeder kompakten Umgebung $V \subseteq K$ eines Punktes $z \in \varrho^{-1}(x)$ mit $\mathring{V}$ als Innerem gibt es ein $j \in N$ derart, daß für alle $i > j$ immer $\varrho\big(f(r_i)\big) \in \varrho(\mathring{V})$ oder $C_0 f(r_i) \subseteq C_0 \mathring{V}$ gilt, woraus $C_0 f(r_i) \cap \mathring{V} \neq \emptyset$ folgt. Es gibt also Elemente

$c_i \in C_0$, $i > j$ derart, daß $c_i f(r_i)$ im Inneren $\mathring{V}$ von V liegt. Es sei $\lim c_i f(r_i) = u \in V$ und W eine beliebige kompakte Umgebung von u in K. Für $i > k$ liege $c_i f(r_i)$ in $\mathring{W}$. Für alle $i > j$ gibt es eine Nullfolge $(r_{ii'} : i' \in N)$ auf G so, daß $\lim \left(f(r_{ii'}) : i \in N\right) = c_i \in C_0 \subseteq \underline{C}$; zu jedem $i > K$ existiert also eine natürliche Zahl $n(i)$ so, daß für $i' > n(i)$ die Beziehung $f(r_{ii'}) f(r_i) = f(r_{ii'} + r_i) \in \mathring{W}$ erfüllt ist. Für eine Folge natürlicher Zahlen $m_i > n(i)$, für welche $(r_{im_i} : i \in N)$ eine Nullfolge auf G ist, liegt demnach die Folge $\left(f(r_{im_i} + r_i) : i \in M\right)$, $M \subseteq N$, in W. Eine Teilfolge hiervon konvergiert gegen ein Element aus W, das aber andererseits in C liegen muß. Also enthält W einen Punkt aus $\underline{C}$. Da K kompakt und also erst recht regulär ist, gibt es beliebig kleine kompakte Umgebungen W von u und daher in jeder beliebigen Nähe von u Elemente aus $\underline{C}$. Da $\underline{C}$ abgeschlossen ist liegt u in $\underline{C}$ und $\varrho(u)$ in $\varrho(\underline{C})$; also liegt x in $\varrho(\underline{C})$ und das war zu zeigen.

Dieser Hilfssatz wird bei der Untersuchung der Struktur von $\underline{C}$ wichtige Dienste leisten. Jedesmal, wenn eine Annahme über $\underline{C}$ zu einem Widerspruch geführt werden soll, kann dies dadurch geschehen, daß man mit einer abgeschlossenen Untergruppe C_0 von $\underline{C}$ das homomorphe Bild $\underline{K}/C_0$ von $\underline{K}$ untersucht und dort einen Widerspruch ableitet; ist C_0 kompakt, so können wir dabei sogar annehmen, daß das Bild K/C_0 fasttopologisch ist. Bei jedem solchen Widerspruchsbeweis können wir also $\underline{C}$ durch eines seiner homomorphen Bilder ersetzen. Dieses noch wiederholt anzuwendende Prinzip nennen wir das *„Prinzip des homomorphen Bildes"*.

(3.11) *K sei eine kompakte fasttopologische Halbgruppe und $f(G)$ eine dichte submonogene Halbgruppe. σ sei ein Homomorphismus von $\underline{K}$ auf die lokalkompakte topologische Halbgruppe $\sigma(\underline{K})$. Ferner sei g ein algebraischer Homomorphismus von $G \cup \{0\}$ in $\sigma(\underline{K})$ der auf $G \cup \{0\}$ hinsichtlich der Halbintervalltopologie $\mathfrak{J}_1$ stetig ist* (3.1). *Dann gestattet g eine Fortsetzung zu einem algebraischen Homomorphismus von R in $\sigma(\underline{K})$, der hinsichtlich der Intervalltopologie $\mathfrak{J}_0$* (3.1) *stetig ist und ebenfalls mit g bezeichnet wird.*

Beweis. Es sei r ein beliebiges Element aus R, und $(r_i : i \in N)$ sei eine beliebige, von oben her gegen r $\mathfrak{J}_0$-konvergente (oder, was dasselbe besagt $\mathfrak{J}_1$-konvergente) Folge auf G. $\sigma(\underline{K}) \cup \{a'\}$ sei die Einpunktkompaktifizierung von $\sigma(\underline{K})$. Dann können wir $y_r = \lim g(r_i) \in \sigma(\underline{K}) \cup \{a'\}$ annehmen. Für eine zweite, von oben gegen r $\mathfrak{J}_0$-konvergente Folge $(s_i : i \in N)$ auf G gelte $z_r = \lim g(s_i) \in \underline{K}$; falls für alle von oben gegen r konvergenten Folgen auf G stets alle Häufungspunkte ihrer g-Bilder gleich a' sind, ist $g(r) = a'$ zu setzen. Wir können nach einem schon früher angewandten Normierungsvorgang $r_i \geqq s_i$ annehmen. Wegen $\lim g(r_i - s_i) = g(0) \neq a'$ und $\lim g(s_i) \in \sigma(\underline{K})$ gilt dann $z_r = \lim g(s_i) = \lim g(s_i)\, g(0) = \lim g(s_i) \lim g(r_i - s_i) = \lim g(r_i) = y_r$. Also stimmen die Häufungspunkte aller Folgen $\left(g(r_i) : i \in N\right)$ mit einer gegen $r \in R$ mit der Halbintervalltopologie konvergenten Folge $(r_i : i \in N)$ auf G überein. Es existiert also $\lim \left(g(s) : s \to r\right.$ bezüglich $\mathfrak{J}_1$, $\left. s \in G\right)$ und wird gleich $g(r)$ gesetzt. Damit ist eine Fortsetzung von $G \cup \{0\}$ auf R geleistet, die bezüglich der Halbintervalltopologie stetig ist (zur Fortsetzung einer Funktion von einem dichten Unterraum auf den ganzen Raum s. z.B. [1], Chap. I, § 6, No 7, S. 54.

Ist U eine kompakte Umgebung von $g(0)$ in $\sigma(\underline{K})$, so gibt es zu jedem $r \in G$ ein Intervall $[r, r+d(r)]$, $d(r)>0$ mit $g\big([r, r+d(r)]\big) \in g(r)\, U \subseteq \sigma(\underline{K})$; da ganz R von den Intervallen $[r, r+d(r)]$ überdeckt wird, ist $g(s) \neq a'$ für alle $s \in R$, d.h. $g(R)$ liegt in $\sigma(\underline{K})$. Wir haben jetzt noch nachzuweisen, daß g auf R auch hinsichtlich der Intervalltopologie $\mathfrak{I}_0$ stetig ist. Es sei also $r \in R$, $0<R$. Zum Beweis der Behauptung reicht es aus, zu zeigen, daß mit jeder von unten gegen r $\mathfrak{I}_0$-konvergenten Folge $(r_i : i \in N)$ auf R die Beziehung $\lim g(r_i) = g(r)$ gilt. U bezeichne eine kompakte Umgebung von $g(0)$, und $q \in R$ sei so ausgewählt, daß $g\big([0, q)\big) \subseteq U$; dies ist möglich, da g bezüglich $\mathfrak{I}_1$ stetig ist. Bezeichnen wir $r - r_i$ mit t_i, so können wir o.B.d.A. $t_i \in \left[0, \frac{q}{2}\right)$ annehmen, da $(r_i : i \in N)$ gegen r konvergiert. Nun liegen alle Elemente $g(r_i)$ in $g\left(r - \frac{q}{2}\right) g\big([0, q)\big)$ also auch in dem kompakten Raum $g\left(r - \frac{q}{2}\right) U$. Danach kann man immer eine Teilfolge $(r_{i_j} : j \in N)$ so ausfindig machen, daß $\big(g(r_{i_j}) : j \in N\big)$ gegen $z \in g\left(r - \frac{q}{2}\right) U$ konvergiert. Für diese Teilfolge gilt aber $z = \lim g(r_{i_j}) = \lim g(r_{i_j})\, g(0) = \lim g(r_{i_j}) \lim g(t_{i_j}) = \lim g(r_{i_j})\, g(t_{i_j}) = g(r)$, und dies gilt für jede konvergente Teilfolge; damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

(3.12) *Die Bezeichnungen seien dieselben wie in* (3.10). *Wiederum sei* $C \neq \emptyset$ *und* $C \neq A_k$. *Die Abbildung* ϱ *sei durch* $\varrho(x) = \underline{C}\, x$ *definiert; wir setzen also* $C_0 = \underline{C}$. *Dann gestattet die Abbildung* g; *die durch die folgende Festsetzung definiert ist:* $g(r) = \begin{cases} \varrho\big(f(r)\big), & \text{wenn } r \in G,\ r>0 \\ \underline{C}, & \text{wenn } r = 0 \end{cases}$ *eine Fortsetzung zu einem stetigen algebraischen Homomorphismus von* R *in* $\underline{K}/\underline{C}$.

Beweis. Wegen (3.11) genügt es festzustellen, daß die auf $G \cup \{0\}$ definierte Abbildung g bezüglich der Halbintervalltopologie stetig ist. Dafür ist aber gerade hinreichend, daß $\bigcap \{\overline{g\big((0, r) \cap G\big)} : r>0\} = \{g(0)\}$ gilt, und die Richtigkeit dieser Beziehung wurde in (3.10) bewiesen (setze $C_0 = \underline{C}$!).

(3.13) *K sei eine kompakte, fasttopologische Halbgruppe, in der eine scharf submonogene Halbgruppe* $f(G)$ *zum Teiler* q *dicht sei. Es gelte* $C \neq \emptyset$, $C \neq A_K$. *Wenn* $\underline{C}$ *diskret ist, dann ist* $\underline{C}$ *eine monogene endliche Gruppe mit zu* q *teilerfremder Ordnung.*

Beweis. Die Abbildung ϱ sei definiert durch $\varrho(x) = x\underline{C}$, und g sei der in (3.12) eingeführte $\mathfrak{I}_0$-stetige algebraische Homomorphismus von R in $\underline{K}/\underline{C}$. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist ϱ ein lokaler Isomorphismus; denn es gibt eine kompakte Umgebung U von 1 und eine kompakte Umgebung W von $\varrho(1)$ in $\underline{K}/\underline{C}$, so daß $U \cap \varrho^{-1}(W)$ bei ϱ eineindeutig und also homöomorph in $\underline{K}/\underline{C}$ abgebildet wird: Es sei nämlich U eine kompakte Umgebung von 1, deren Schnitt $U \cap \underline{C}$ mit $\underline{C}$ nur 1 enthält. Angenommen, es existierte eine gegen 1 konvergente Folge $(u_i : i \in N)$ von Elementen in U mit der Eigenschaft, daß zu jedem $i \in N$ ein $c_i \in \underline{C}$ derart existierte, daß $c_i u_i \in U$ und $c_i u_i \neq u_i$ gilt. Da U (bzw. C) kompakt ist, können wir $\lim c_i u_i = u \in U$ (bzw. $\lim c_i = c \in C$) annehmen. Wegen $\lim u_i = 1 \in \underline{C}$ gilt $u = c \cdot 1 = c \neq a$. Daraus folgt wegen

$U \cap C = \{1\}$ notwendig $c = 1$. Da aber $\underline{C}$ diskret ist, gibt es ein $j \in N$, so daß für alle $i > j$ immer $c_i = c = 1$ gilt im Widerspruch zu $c_i u_i \neq u_i$. Es gibt demnach eine Umgebung W von $\varrho(1)$ in $\varrho(K)$, so daß aus $cu = u \in \varrho^{-1}(W) \cap U$ stets $c = 1$ folgt.

Es gibt eine reelle Zahl $q > 0$ so, daß $[0, q]$ von g in W und außerdem eineindeutig abgebildet wird. Die Zuordnung $f' : r \to \varrho^{-1}(g(r)) \cap U$ für $r \in [0, q]$ ist eine homöomorphe Abbildung von $[0, q]$ in $\varrho^{-1}(W) \cap U$ mit der Eigenschaft, daß aus $r_1, r_2, r_1 + r_2 \in [0, q]$ immer $f'(r_1 + r_2) = f'(r_1) f'(r_2)$ folgt. Die Menge $\varrho^{-1}(g([0, q]))$ ist gleich $f'([0, q]) \underline{C}$ und dieses Produkt ist direkt; denn aus $f'(r_1) c_1 = f'(r_2) c_2 \in f'([0, q]) \underline{C}$ folgt $f'(r_1) = f'(r_2) c_2 c_1^{-1}$ und daraus $r_1 = r_2 = r$, was infolge $f'(r) c_2 c_1^{-1} = f'(r) \in \varrho^{-1}(W) \cap U$ dann $c_2 c_1^{-1} = 1$ und $c_2 = c_1$ nach sich zieht. Ist $(u_i : i \in L)$ ein auf $f'([0, q]) \underline{C}$ gegen u konvergentes Netz, und gilt $u_i = f'(r_i) c_i$ und $u = f'(r) c$, so können wir $c' = \lim_L c_i \in C$ für ein gewisses Teilnetz $(c_i : i \in L')$, $L' \subseteq L$ annehmen. Wegen $\lim f'(r_i) = f'(r)$ ist aber c' von a verschieden, und es gilt $c' = c$. Jedes Teilnetz von $(c_i : i \in L)$ konvergiert also gegen c; demnach konvergiert dieses Netz selbst gegen c. Die Projektion p von $f'([0, q]) \underline{C}$ auf $\underline{C}$ ist demnach stetig. Da $\underline{C}$ diskret und p stetig ist, gilt für $0 < r < q$ immer $p\left(\overline{f((0, r) \cap G)}\right) \subseteq \overline{p\left(f((0, r) \cap G)\right)} = p\left(f((0, r) \cap G)\right)$. Danach bekommen wir $\underline{C} = p(\underline{C}) = p(\bigcap \{\overline{f((0, r) \cap G)} : 0 < r < q\}) \subseteq \bigcap \{p\left(\overline{f((0, r) \cap G)}\right) : 0 < r < q\} = \bigcap \{f_0((0, r) \cap G) : 0 < r < q\} = P$ mit $f_0 = p \circ f$. Wäre f_0 auf $(0, r)$ für ein r mit $0 < r < q$ eineindeutig, so wäre der Durchschnitt P leer im Gegensatz zu der Voraussetzung $\underline{C} \neq \emptyset$; es gibt also eine submonogene, nicht monogene Unterhalbgruppe G_0 von G, die bei f_0 auf $1 \in \underline{C}$ abgebildet wird. Da G scharf submonogen ist, ist $G_0 = nG$ mit einer natürlichen Zahl n, die von q nicht geteilt wird und $\underline{C} \cong G'/nG'$ ist monogen von der endlichen Ordnung n.

(3.14) *Die Behauptung der vorigen Nummer ist nicht mehr richtig, wenn G nicht scharf submonogen ist.*

Beispiel. Es sei G die von $\left(1/(2.3)^i : i \in N\right)$ in R erzeugte submonogene Unterhalbgruppe. Diese werde zunächst durch f_1 algebraisch homomorph auf eine Untergruppe der additiven Gruppe der rationalen Zahlen modulo 1 abgebildet; das Bild ist ein direktes Produkt der Gruppe $Z(2^\infty)$ und der Gruppe $Z(3^\infty)$. Nun sei K das direkte Produkt der Gruppe $Z(2^\infty)$ mit der diskreten Topologie und der Gruppe T, der additiven Gruppe aller reellen Zahlen modulo 1 mit der natürlichen Topologie. Das Neutralelement dieser Gruppe werde mit $0'$ bezeichnet. T enthält ein durch den algebraischen Isomorphismus h vermitteltes Bild der Gruppe $Z(3^\infty)$ als dichte Untergruppe. Die Abbildung f_2 sei ein algebraischer Isomorphismus von $Z(2^\infty) \times Z(3^\infty)$ in $\underline{K} = Z(2^\infty) \times T$, der einem Element (x, y) das Element $\left(x, h(y)\right)$ zuordnet. Ist $f = f_2 \circ f_1$, so ist $f(G)$ dicht in $\underline{K}$ und $\underline{C} = Z(2^\infty) \times \{0'\}$; denn jedes Element dieser Untergruppe von $\underline{K}$ hat ein Urbild der Form $(r + G_3') \cap G$, wo G_3' die von $1/3^i$, $i \in N$ in R' erzeugte Untergruppe bezeichnet, und dieses Urbild hat mit jedem Intervall $(0, r) \cap G$, $0 < r$ einen nichtleeren Durchschnitt.

(3.15) *Die Voraussetzungen von (3.13) seine dadurch abgeschwächt, daß $\underline{C}$ nicht mehr als diskret, sondern nur als total unzusammenhängend vorausgesetzt*

wird. Dann ist C kompakt und projektiver Limes monogener Gruppen mit zu q primer Ordnung.

Beweis. In einer total unzusammenhängenden lokalkompakten abelschen Gruppe hat das Neutralelement eine Umgebungsbasis aus kompakten und offenen Untergruppen. Es sei C_0 eine von diesen. Dann ist $\underline{C}/C_0$ diskret. Nach dem Prinzip des homomorphen Bildes (3.10) folgt dann aus der vorhergehenden Nummer, daß $\underline{C}/C_0$ eine monogene Gruppe mit zu q primer Ordnung sein muß. Da dies für alle offenen und kompakten Untergruppen C_0 gilt, ist die Behauptung bewiesen.

(3.16) *K sei eine kompakte, fasttopologische Halbgruppe mit einer submonogenen dichten Untergruppe $f(G)$, die Bild einer scharf submonogenen Unterhalbgruppe G von R ist. Es gelte $C \neq \emptyset$, $C \neq A_K$. Dann ist C isomorph dem direkten Produkt einer n-dimensionalen Vektorgruppe R^n und einer kompakten Gruppe Z.*

Beweis. Es sei C_0 die Zusammenhangskomponente von 1 in $\underline{C}$. Dann ist in $\underline{K}/C_0$ die Untergruppe $\underline{C}/C_0$ total unzusammenhängend. Nach dem Prinzip des homomorphen Bildes (3.10) und nach (3.15) ist dann $C_0/\underline{C}$ kompakt. Die Behauptung über die Struktur von $\underline{C}$ folgt aus bekannten Sätzen aus der Theorie der lokalkompakten abelschen Gruppen ([25], S. 109ff.). Im folgenden wenden wir uns dem allgemeineren Fall zu, bei dem G nicht mehr notwendigerweise scharf submonogen zu sein braucht.

(3.15) *K sei eine kompakte fasttopologische Halbgruppe, in der eine submonogene Halbgruppe $f(G)$ dicht sei. $\underline{C}$ sei nicht leer und ϱ sowie g seien wie in (3.12) definiert. Jedem r aus R, der Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen, wird die folgende Teilmenge von $\underline{C}$ zugeordnet:*

a) $C(r) = \{c\colon c \in \underline{C};$ *es gibt ein* $x \in \underline{K}$ *mit* $\varrho(x) = g(r)$ *und* $cx = x\}$.

Die Abbildung $r \to C(r)$ von R in die Menge der Teilräume von $\underline{C}$ hat folgende Eigenschaften:

b) $C(r)$ *ist eine abgeschlossene Untergruppe von C.*

c) $C(0) = \{1\}$.

d) *Aus* $s \leqq r$ *folgt* $C(s) \subseteq C(r)$.

e) $C(r) = \bigcap \{C(s)\colon r < s\}$.

f) $C(r)$ *enthält keine nichtkompakten abgeschlossenen Hüllen von monogenen Untergruppen, d.h. keine torsionsfreien diskreten monogenen Untergruppen.*

Beweis. Sind x und y Elemente aus $\varrho^{-1}(g(r))$, so gibt es eine $c_0 \in \underline{C}$, so daß $c_0 x = y$. Ist also $cx = x$, so gilt auch $cy = cc_0 x = c_0 cx = c_0 x = y$. Läßt c also ein Element aus $\varrho^{-1}(g(r))$ fest, so auch alle Elemente daraus. Jeder Grenzwert einer Filterbasis, deren Mengen aus solchen Elementen c von $\underline{C}$ besteht, läßt ebenfalls jedes Element aus $\varrho^{-1}(g(r))$ fest. Da Produkte und Inverse von Elementen aus $C(r)$ wieder zu $C(r)$ gehören, ist b) bewiesen. c) folgt aus der Gruppeneigenschaft von $\underline{C}$. Ist $s < r$, $\varrho(x) = g(s)$, $\varrho(y) = g(r-s)$

und $cx=x$, so gilt auch $cxy=xy$; wegen $\varrho(xy)=g(r)$ folgt daraus d). Nun sei $c\in C(s)$ für alle $r<s$. Dann gibt es in jeder Umgebung eines Elementes $x\in\varrho^{-1}(g(r))$ Elemente y, für welche $cy=y$ gilt. Dann ist aber auch $cx=x$. Damit ist e) bewiesen. Ist $\langle c\rangle$ eine diskrete torsionsfreie Untergruppe von $\underline{C}$, so gilt $\lim c^i=a$, wenn i über alle Grenzen wächst. Da K fasttopologisch ist, gilt $\lim c^i x=ax=a$. Also liegt $\langle c\rangle$ sicher nicht in $C(r)$ mit $\varrho(x)=g(r)$. Bei diesem Beweis des Punktes f) der Behauptung geht die Voraussetzung, daß K fasttopologisch sei, wiederum entscheidend ein.

(3.16) *K sei eine kompakte fasttopologische Halbgruppe mit dichter submonogener Unterhalbgruppe $f(G)$. Es sei $\underline{C}$ nicht leer und g sei nicht trivial, d.h. es gelte $\underline{C}\neq\underline{K}$. Es bedeutet dann keine Einschränkung der Allgemeinheit, g auf $[0,1]$ eineindeutig anzunehmen. Für alle $r\in[0,1]$ gelte $C(r)=\langle 1\rangle$. Dann gibt es einen stetigen algebraischen Homomorphismus h von R in K, für den $\varrho(h(r))=g(r)$ gilt und es gibt ein $r_0>0$ so, daß $\varrho^{-1}(g([0,r_0]))=Ch([0,r_0])$ ein lokales direktes Produkt ist. Dabei wird die Struktur von K benützt und nicht, daß K fasttopologisch ist. Der Satz gilt also auch für alle homomorphen Bilder von K gemäß* (3.10).

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß wir g auf $[0,1]$ eineindeutig annehmen dürfen. Würde nämlich kein Intervall $[0,q]$ mit $0<q$ durch g homöomorph abgebildet werden, so würde mit den Bezeichnungen von § 1 $j_1=j_2=0$ folgen, und das Bild von R bei g wäre eine Gruppe, also eine Einparametergruppe; g ließe sich zu einem stetigen algebraischen Homomorphismus von R' auf diese Gruppe fortsetzen, dessen Kern einerseits nicht diskret und andererseits wegen der Stetigkeit von g abgeschlossen wäre und daher mit R' übereinstimmen müßte, was mit der Nichttrivialität von g unverträglich wäre.

Wir setzen $U=\varrho^{-1}(g([0,1/3]))$, so daß also $UUU=\varrho^{-1}(g([0,1]))$ gilt. Die Translationen $x\to ux$, $u\in UU$ sind auf U eineindeutig: Aus $ux_1=ux_2$ folgt zunächst $\varrho(u)\,\varrho(x_1)=\varrho(u)\,\varrho(x_2)$, also $\varrho(x_1)=\varrho(x_2)$ oder $x_1=cx_2\in\varrho^{-1}(g(s))$ mit $c\in C$; wegen $C(s)=\langle 1\rangle$ ist aber $c=1$.

Auf dem Halbgruppenproduktkeim $U\times U$ betrachten wir die Äquivalenzrelation Θ, für die $(x_1,y_1)\,\Theta\,(x_2,y_2)$ genau dann gelte, wenn $x_1y_2=y_1x_2$ gilt. Liegen die Relationen $(x_1,y_1)\,\Theta\,(x_2,y_2)$ und $(x_2,y_2)\,\Theta\,(x_3,y_3)$, so haben wir nach Definition die Bedingungen $x_1y_2=y_1x_2$ und $x_2y_3=y_2x_3$. Multipliziert man die erste Gleichung mit y_3 und die zweite mit y_1 durch, so folgt die Identität $x_1y_2y_3=y_1y_2x_3$. Da die in dieser Gleichung auftretenden Elemente in $UUU=\varrho^{-1}(g([0,1]))$ liegen, gilt $x_1y_3=y_1x_3$, d.h. $(x_1,y_1)\,\Theta\,(x_3,y_3)$. Θ ist also eine Äquivalenzrelation auf dem Halbgruppenkeim $U\times U$ die, wie man unmittelbar sieht, mit der Multiplikation auf $U\times U$ verträglich ist. Der topologische Halbgruppenkeim $U'=(U\times U)/\Theta$ ist aber ein topologischer Gruppenkeim: Das Inverse von $\Theta(x,y)$ ist $\Theta(y,x)$, denn es gilt $\Theta(x,y)\,\Theta(y,x)=\Theta(1,1)$; die Klasse, die aus allen Paaren (z,z) besteht ist das Neutralelement 1 von U'. Die Abbildung $\Theta(x,y)\to\Theta(y,x)$ ist ein Homöomorphismus von U', denn $(x,y)\to(y,x)$ ist ein Homöomorphismus von $U\times U$. Die Abbildung $x\to\Theta(x,1)$ bildet den Halbgruppenkeim $U=\varrho^{-1}(g([0,1/3]))$ isomorph

in U' ab, denn aus $\Theta(x,1)=\Theta(y,1)$ folgt $x\cdot 1=y\cdot 1$. Jedes Element $\Theta(x,y)\in U'$ läßt sich in der Form $\Theta(z,1)$ oder $\Theta(1,z)$ darstellen; es sei nämlich $\varrho(x)=g(r)$, $\varrho(y)=g(s)$ und etwa $r\geqq s$. Ist z' ein beliebiges Element aus $\varrho^{-1}\big(g(r-s)\big)$ so gilt $x=yz'c$ mit $c\in\underline{C}$ oder $x=yz$ mit $z=z'c$. Also ist $\Theta(x,y)=\Theta(yz,y)=\Theta(z,1)$. Entsprechendes gilt für $r\leqq s$. Die Untergruppe $\underline{C}'=\Theta(\underline{C}\times\underline{C})$ von U' ist isomorph zu $\underline{C}$. Nun bezeichne ϱ' diejenige Äquivalenzrelation auf U', deren Klassen aus den Mengen $\Theta(x,y)\,\underline{C}'=\Theta(x,y)\,\Theta(\underline{C}\times\underline{C})=\Theta(x\underline{C}\times y\underline{C})$ bestehen. Die Abbildung $r\to g(r)\to\Theta\big(\varrho^{-1}(g(r)),\underline{C}\big)$ von $[0,1/3]$ in U'/ϱ' ist ein lokaler Isomorphismus, der sich zu einem lokalen Isomorphismus g' von $[-1/3,1/3]$ in U'/ϱ' fortsetzen läßt, indem man für $r\in[-1/3,0]$ jeweils $g'(r)=\Theta\big(\underline{C},\varrho^{-1}((g)r)\big)$ setzt. Da nach einer Bemerkung von vorhin jedes Element in U' die Form $\Theta(x,1)$ oder $\Theta(1,x)$ hat, ist g' ein lokaler Isomorphismus von $[-1/3,1/3]$ auf U'/ϱ'. Nun ist also U' ein lokalkompakter abelscher Gruppenkeim mit einer abgeschlossenen lokalkompakten Untergruppe $\underline{C}'$ und einer zu einer lokalen Einparametergruppe isomorphen lokalen Faktorgruppe $U'/\underline{C}'$.

Nun sei u ein Element aus $\varrho'^{-1}\big(g'(1/6)\big)$; dann liegt die Menge $\langle u\rangle'$ der Elemente $\underline{1}$, $u^{\pm 1}$, $u^{\pm 2}$ in U'. Wir betrachten auf $U''=\varrho'^{-1}\big(g'([-1/6,1/6])\big)$ die Kongruenzrelation σ, die zwischen zwei Elementen x und y aus U' genau dann besteht, wenn xy^{-1} und yx^{-1} in $\langle u\rangle'$ liegen. Sind x und y Elemente aus U'' mit $\varrho'(x)=g'(r)$ und $\varrho'(y)=g'(s)$ und ist $0\leqq r\leqq s<1/6$, so gilt $-1/6\leqq s-1/6<r$; und wählen wir ein beliebiges Element $v'\in\varrho'^{-1}\big(g'(r-s+1/6)\big)$ so gilt $u^{-1}y\cdot v'=cx$, woraus mit $v=v'c^{-1}$ die Beziehungen $u^{-1}y\cdot v=x$ und $\sigma(y)\,\sigma(v)=\sigma(x)$ folgt. Noch einfacher ist die Existenz eines Elementes $w\in U''$ einzusehen, für welches $\sigma(x)\,\sigma(w)=\sigma(y)$ gilt. Damit ist aber nachgewiesen, daß U''/σ eine Gruppe bildet, die zu dem Gruppenkeim U' lokal isomorph ist. In der abelschen lokalkompakten Gruppe U''/σ gibt es aber eine Einparametergruppe, die die Faktorgruppe $(U''/\sigma)/(\underline{C}'/\sigma)$ deckt, d.h. bei dem Restklassenhomomorphismus σ auf die Faktorgruppe abgebildet wird. Da U''/σ und U' lokal isomorph sind, gibt es in U' eine lokale Einparametergruppe, die die lokale Faktorgruppe $U'/\underline{C}'$ deckt; es existiert also eine homöomorphe Abbildung h' des Intervalls $[-1/3,1/3]$ in U', so daß für alle $r_1, r_2, r_1+r_2\in[-1/3,1/3]$ die Beziehung $h'(r_1)\,h'(r_2)=h'(r_1+r_2)$ und außerdem für alle $r\in[-1/3,1/3]$ stets $\varrho'\big(h'(r)\big)=g'(r)$ gilt. U' ist das lokale direkte Produkt von $\underline{C}'$ und $h'([-1/3,1/3])$. Bezeichnet für den Augenblick φ die Umkehrabbildung der Abbildung $x\to\Theta(x,1)$ von $\varrho^{-1}\big(g([0,1/3])\big)$ auf $\varrho'^{-1}\big(g'([0,1/3])\big)$, so ist die durch $h(r)=\varphi\big(h'(r)\big)$ auf $[0,1/3]$ definierte Abbildung h ein stetiger lokaler Isomorphismus von R in $\underline{K}$, der sich auf natürliche Weise zu einem stetigen algebraischen Homomorphismus von R in K fortsetzen läßt. h hat die in der Behauptung verlangten Eigenschaften.

(3.17) *K sei eine kompakte fasttopologische Halbgruppe mit dichter submonogener Halbgruppe $f(G)$; es sei $\underline{C}\neq\emptyset$. Dann gelten folgende Behauptungen:*

a) *$\underline{C}$ enthält keine zu einer Vektorgruppe R'^n, $n>0$ isomorphe Untergruppe, d.h. die Zusammenhangskomponente von 1 in $\underline{C}$ ist stets kompakt.*

b) *Enthält $\underline{C}$ keine beliebig kleinen Untergruppen, d.h. gibt es eine Umgebung V von 1 in $\underline{C}$, die außer $\langle 1\rangle$ keine Untergruppen enthält, so ist bekanntlich* ([19], [25]) *$\underline{C}$ eine abelsche Liegruppe, in der die Zusammenhangskomponente von 1 nach* a) *eine endlichdimensionale Torusgruppe sein muß. Dann gibt es einen stetigen algebraischen Homomorphismus h von R in $\underline{K}$ mit $\varrho(h(r))=g(r)$.*

Beweis. a) $\underline{C}$ enthalte eine zu einer mindestens eindimensionalen Vektorgruppe isomorphe Untergruppe C_n. Dann ist $\underline{C}$ das direkte Produkt einer Untergruppe F, die eine kompakte und offene Untergruppe enthält und der Gruppe C_n. Die sämtlichen Untergruppen $C(r)$, $r\in R$ sind dann in der Gruppe F enthalten, da sie anderenfalls unendliche monogene und diskrete Untergruppen enthalten müßten, was in (3.15, f) gerade ausgeschlossen war. Wir zerlegen C_n in das direkte Produkt $C_1\times C_{n-1}$ einer ein- und einer $n-1$-dimensionalen Vektorgruppe. Wir wenden auf $\underline{K}$ das Prinzip des homomorphen Bildes (3.10) an und bilden $\underline{K}/C_{n-1}F$. Von nun an können wir also annehmen, daß $\underline{C}$ eine eindimensionale Vektorgruppe sei. Wenn nun $\underline{C}=\underline{K}$ wäre, dann müßte ein algebraisch homomorphes Bild der Halbgruppe G in der Vektorgruppe R^1 dicht sein; da R^1 torsionsfrei ist, müßte dieses Bild eineindeutig sein und daher ganz in einer der beiden Unterhalbgruppen $(-\infty, 0)$ oder $(0, \infty)$ enthalten und könnte dann hinwiederum in R' nicht dicht sein. Also sei jetzt $\underline{C}\neq\underline{K}$. Durch den nichttrivialen Homomorphismus g von R in $\underline{K}$ werde das Intervall $[0, 1]$ eineindeutig abgebildet; nach einer Bemerkung zu Beginn des Beweises von (3.16) ist diese Annahme gerechtfertigt. Außerdem ist $C(r)=\langle 1\rangle$ für alle $r\in R$, wie wir vorhin feststellten. Nach (3.16) ist jetzt $\varrho^{-1}(g([0, 1/3]))$ ein direktes Produkt $\underline{C}h([0, 1/3])$ aus $\underline{C}$ und einer lokalen Einparameterhalbgruppe $h([0, 1/3])$. Der Unterraum $f([0, 1/3]\cap G$ ist dicht in diesem Produkt. Die Projektion dieses Unterraums auf den Faktor $\underline{C}$ liefert dort einen dichten Unterraum; andererseits ist diese Projektion ein algebraisch isomorphes Bild des Halbgruppenkeims $[0, 1/3]\cap G$ und liegt daher ganz in einem Halbstrahl von $\underline{C}$, der in dem isomorphen Bild R'^1 von $\underline{C}$ einem der Intervalle $(-\infty, 0)$ oder $(0, \infty)$ entspricht. Dann kann diese Projektion aber nicht in $\underline{C}$ dicht sein. Mit diesem Widerspruch ist a) bewiesen.

b) Um den zweiten Teil der Behauptung zu beweisen, setzen wir zunächst voraus, $\underline{C}$ sei zusammenhängend, also eine endlichdimensionale Torusgruppe. Im Falle $\underline{C}=\underline{K}$ ist die Behauptung trivial; also sei jetzt g nicht trivial. Jede zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von $\underline{C}$ ist eine endlichdimensionale Torusgruppe, und jede aufsteigende Kette solcher Untergruppen bricht nach höchstens n Schritten ab, wenn n die Dimension von $\underline{C}$ angibt. Es gibt demnach nur endlich viele Stellen $0<r_1<\cdots<r_m$ in R, in denen die Dimension von $C(r)$ springt, d.h. ,für die aus $s<r_i$ jeweils $\dim C(s)<\dim C(r_i)$ folgt. Nun ist $C(s)$ für $0\leqq s<r_1$ diskret, denn $C(0)$ ist nulldimensional und jede nulldimensionale abgeschlossene Untergruppe von $\underline{C}$ ist diskret. $C(s)$ ist für diese Werte von s sogar endlich, und da der Durchschnitt der $C(s)\setminus\{1\}$, genommen über alle s mit $0<s<r_1$ wegen (3.15. c, e) leer ist, muß ein s_0 aus $(0, r_1)$ vorhanden sein, für welches $C(s_0)\setminus\{1\}$ leer ist. O.B.d.A. dürfen wir $s_0=1$ annehmen; eventuell ist f und damit auch g so umzunormieren,

daß f durch f' mit $f'(r)=f(rs_0')$ ersetzt wird, wo s_0' ein zwischen 0 und s_0 gelegenes Element aus G bezeichnet. Die Voraussetzungen von (3.16) sind wieder erfüllt; es gibt also einen stetigen algebraischen Homomorphismus h von R in $\underline{K}$ mit $\varrho\big(h(r)\big)=g(r)$ und $\underline{K}$ ist lokal dem direkten Produkt $\underline{C}\times R$ isomorph.

Nun lassen wir die Voraussetzung fallen, daß $\underline{C}$ zusammenhängend sein muß. Die Zusammenhangskomponente $\underline{C}'$ von 1 in $\underline{C}$ ist eine in $\underline{C}$ offene Torusgruppe einer endlichen Dimension, die gleich 0 oder größer ist. Diese Untergruppe ist dividierbar und ist daher in der abelschen Gruppe $\underline{C}$ ein algebraisch direkter Faktor mit einem Komplementärfaktor C_0. Da aber $\underline{C}'$ offen ist, ist dieser Faktor diskret und daher auch abgeschlossen; daher ist $\underline{C}$ das direkte Produkt von $\underline{C}$ und C_0 auch im topologischen Sinne. Wir zeigen nun, daß der Homomorphismus ϱ_0 von $\underline{K}$ auf $\underline{K}/C_0$ gemäß (3.10) ein lokaler Isomorphismus ist, d.h. daß eine Umgebung U von 1 in $\underline{K}$ vorhanden ist, die bei ϱ_0 eineindeutig abgebildet wird. Wäre dies nämlich nicht der Fall, dann gäbe es eine Folge $(x_i\colon i\in N)$ mit $\varrho(x_i)=g(r_i)$, $r_i>0$, die gegen 1 konvergierte, für die eine Folge $(c_i\colon i\in N)$ auf C_0 existieren müßte mit Elementen $c_i\neq 1$ und $c_i x_i=x_i$. Wegen $\lim x_i=1$ und der Kompaktheit von K sowie der Voraussetzung, K sei fasttopologisch, können wir $\lim c_i=c\in C_0$ annehmen. Da C_0 diskret ist, gibt es ein $j\in N$, so daß für $i>j$ immer $c_i=c$ gilt. Ohne Einschränkung sei jetzt $c_i=c$ für alle $i\in N$. Dann aber muß $c1=1$ und wegen $C(0)=1$ auch $c=1$ gelten im Widerspruch zu $c_i\neq 1$. Nach dem vorher Bewiesenen existiert in $\underline{K}/C_0$ eine Vertreterhalbgruppe für $(\underline{K}/C_0)/(\underline{C}/C_0)$, nämlich ein stetiger algebraischer Homomorphismus h_0 von R in $\underline{K}/C_0$ mit $\varrho\big(\varrho_0^{-1}(h_0(r))\big)=g(r)$. Es gibt eine positive reelle Zahl q derart, daß $[0,q]$ durch h_0 eineindeutig in $\varrho_0(U)$ abgebildet wird, da g ein solches Intervall für hinreichend kleines q sicher eineindeutig abbildet. Die Abbildung $x\to\varrho_0^{-1}(x)\cap U$ ist ein lokaler Isomorphismus von $\varrho_0(U)$ auf U und $r\to\varrho_0^{-1}\big(h_0(r)\big)$ ist ein Homöomorphismus von $[0,q]$ in $\underline{K}$, der sich zu einem stetigen algebraischen Homomorphismus h von R in $\underline{K}$ fortsetzen läßt, für den $\varrho\big(h(r)\big)=g(r)$ gilt.

(3.18) *$\underline{K}$ sei eine kompakte fasttopologische Halbgruppe mit dichter submonogener Unterhalbgruppe $f(G)$; $\underline{C}$ sei nicht leer. Dann existiert eine stetige algebraisch homomorphe Abbildung h von R in $\underline{K}$, für die $\varrho\big(h(r)\big)=g(r)$ gilt.*

Beweis. In $\underline{C}$ existiert eine Filterbasis $\mathfrak{F}$ aus kompakten Untergruppen C_0, für die $\underline{C}/C_0$ keine beliebig kleinen nichttrivialen Untergruppen enthält und deren Durchschnitt gleich $\{1\}$ ist; $\underline{C}$ ist der projektive Limes der Gruppen $\underline{C}/C_0$ (vgl. [*19*], [*25*], S. 110, S. 88).

$\mathfrak{H}$ sei die Menge aller in $K\cap\varrho^{-1}\big(g(R)\big)$ abgeschlossenen Unterhalbgruppen H, zu denen es ein C_0 aus der Filterbasis $\mathfrak{F}$ gibt, so daß HC_0/C_0 eine Einparameterhalbgruppe (d.h. also ein stetiges algebraisch homomorphes Bild von R) in $\underline{K}/C_0$ ist, die nicht ganz in $\underline{C}/C_0$ enthalten ist. $\mathfrak{H}$ ist sicher nicht leer, vielmehr enthält $\mathfrak{H}$ zu jedem C_0 aus $\mathfrak{F}$ wenigstens ein H mit diesen Eigenschaften, wie in der vorausgehenden Nummer gezeigt wurde. Jedem $H\in\mathfrak{H}$ ordnen wir die Menge $\mathfrak{F}(H)$ aller der $C_0\in\mathfrak{F}$ zu, für welche HC_0/C_0 eine Einparameterhalbgruppe in $\underline{K}/C_0$, aber nicht in $\underline{C}/C_0$ darstellt. In der Menge $\mathfrak{H}$ erklären wir

Ordnungsrelation, indem wir für zwei Elemente H und H' aus $\mathfrak{H}$ genau dann $H<H'$ setzen, wenn sowohl $\mathfrak{F}(H)\subseteq\mathfrak{F}(H')$, als auch $H'\subseteq H$ gilt. Wir zeigen, daß $\mathfrak{H}$ bezüglich $<$ induktiv ist: Liegt eine $<$-Kette (d.h. ein bezüglich $<$ vollständig geordnetes Teilsystem) $(H_i: i\in L)$ in $\mathfrak{H}$ vor, so ist $H_0=\cap\{H_i: i\in L\}$ ein Element aus $\mathfrak{H}$ und eine obere Schranke für die Kette: Da die $C_0\in\mathfrak{F}$ kompakt sind, ist $HC_0\cap C$ für jedes $C_0\in\mathfrak{F}(H)$ kompakt, weil es in C_0 enthalten ist. Dann ist auch $\varrho^{-1}(g(r))\cap HC_0$ als stetiges Bild von $HC_0\cap\underline{C}$ bei der Abbildung $c\to cx$ mit $x\in\varrho^{-1}(g(r))\cap HC_0$ kompakt. Ist nun H ein bestimmtes Element aus der Kette $(H_i: i\in L)$, so sind für alle H_i mit $H<H_i$ die Mengen $H_i\cap\varrho^{-1}(g(r))$ kompakte Teilräume von $HC_0\cap\varrho^{-1}(g(r))$, $C_0\in\mathfrak{F}(H)$. Dann ist aber der Durchschnitt dieser Räume nicht leer, d.h. es gilt $H_0\cap HC_0\varrho^{-1}(g(r))\neq\emptyset$ für alle $r\in R$. Dann aber ist z.B. mit demselben $C_0\in\mathfrak{F}$ die Beziehung $H_0C_0/C_0=HC_0/C_0$ erfüllt; daher liegt H_0 in $\mathfrak{H}$. Da H_0 der Durchschnitt aller Kettenglieder H_i ist und sicher $\mathfrak{F}(H_0)\subseteq\cup\{\mathfrak{F}(H_i): i\in L\}$ gilt, ist H_0 tatsächlich eine obere Schranke der Kette. Nach dem Zornschen Lemma existieren Elemente in $\mathfrak{H}$, die bezüglich $<$ maximal sind; es sei H ein solches. Wir setzen $C_1=\cap\{C_0: C_0\in\mathfrak{F}(H)\}$; dann ist HC_1/C_1 eine Einparameterhalbgruppe; dies folgt aus der Tatsache, daß für jedes $r\in R$ die Menge $HC_1\cap\varrho^{-1}(g(r))$ modulo C_1 nur aus einem Punkt besteht; zum Beweis beachten wir, daß es ein $x\in H\cap\varrho^{-1}(g(r))$ derart gibt, daß für alle C_0 aus $\mathfrak{F}(H)$ stets $HC_0\cap\varrho^{-1}(g(r))=xC_0$ ist, denn HC_0/C_0 ist eine Einparameterhalbgruppe mit der Eigenschaft, daß genau eine Klasse modulo C_0 aus ihr bei ϱ auf $g(r)$ abgebildet wird (3.17). Dann ist $HC_1\cap\varrho^{-1}(g(r))$ in dem Durchschnitt $\cap\{xC_0: C_0\in\mathfrak{F}(H)\}$ enthalten, der die Berührmenge der Filterbasis der endlichen Durchschnitte der kompakten Teilräume xC_0 ist. Diese ist aber dann das Produkt von x mit der Berührmenge der Filterbasis, die von $\mathfrak{F}(H)$ erzeugt wird und ist daher gleich xC_1. Daß HC_1/C_1 wirklich eine stetige Einparameterhalbgruppe ist, folgt aus der Abgeschlossenheit von H in $\varrho^{-1}(g(R))$ und der von HC_1/C_1 in $\varrho^{-1}(g(R))/C_1$, sowie aus der Tatsache, daß für jedes $r\in R$ genau eine Klasse modulo C_1 aus HC_1 bei ϱ auf $g(r)$ abgebildet wird. Wenn jetzt noch gezeigt werden kann, daß C_1 nur das Element 1 enthält, ist die Behauptung des Satzes bewiesen, und zwar liefert dann bei geeigneter Parameternormierung der stetige algebraische Homomorphismus von R auf $HC_1/C_1=H$ gerade die in der Behauptung verlangte Abbildung h. Nun sei im Gegensatz zu der eben behaupteten Eigenschaft C_1 echt größer als $\{1\}$; dann existiert ein $C_2\in\mathfrak{H}$ derart, daß $\underline{C}/C_2$ keine beliebig kleinen Untergruppen enthält, und daß C_1 nicht in C_2 enthalten ist. Dann enthält HC_2/C_2 eine Einparameterhalbgruppe H_0C_2/C_2, $H_0\subset H$, die in HC_2/C_2 echt enthalten ist, denn C_2 liegt nicht in $\mathfrak{F}(H)$; in der Halbgruppe $\underline{K}/C_2$ ist nach (3.17) eine lokal offene Unterhalbgruppe enthalten, die lokal dem direkten Produkt $(\underline{C}/C_2)'\times R$ isomorph ist, wenn $(\underline{C}/C_2)'$ die Zusammenhangskomponente von C_2/C_2 in $\underline{C}/C_2$ bezeichnet; der Durchschnitt dieser Unterhalbgruppe mit HC_2/C_2 ist sicher nicht trivial, da sie in $\underline{K}/C_2$ offen ist; HC_2/C_2 ist lokalisomorph zu einer angularen Unterhalbgruppe von $(\underline{C}/C_2)'\times R$; sie enthält dann sicher eine Einparameterhalbgruppe H_0C_2/C_2, die nicht in $(\underline{C}/C_2)'$ enthalten ist, wenn wir noch die folgende Hilfsbemerkung bewiesen haben: *Ist T^n eine*

n-dimensionale Torusgruppe, R die Halbgruppe aller nicht negativen reellen Zahlen bezüglich der Addition und ist L eine abgeschlossene Unterhalbgruppe von $T^n \times R$, die mit allen Teilräumen $T^n \times \{r\}$, $r \in R$ nichttrivialen Durchschnitt hat, so enthält L eine Einparameterhalbgruppe E, die sich eineindeutig auf den Faktor $\langle 1 \rangle \times R$ projizieren läßt. Zum Beweis suchen wir eine Teilfolge M der Folge N der natürlichen Zahlen derart, daß erstens eine Folge $(c_i\colon i \in M)$ auf T^n so existiert, daß $\big((c_i, 1/i!)\colon i \in M\big)$ auf L gegen $(1, 0)$ konvergiert, und daß für alle rationalen Zahlen r aus R mit $r = n_i/i!$ der Grenzwert $\lim_M (c_i\, n_i, n_i/i!) = c(r)$ existiert; dies ist möglich weil $L \cap \big(T^n \times \{1/i!\}\big)$ nicht leer und kompakt und weil $L \cap \big(T^n \times \{0\}\big)$ eine kompakte Liegruppe ist. Es ist sofort zu sehen, daß $r \to c(r)$ ein nichttrivialer algebraischer Homomorphismus der Unterhalbgruppe G aller Rationalzahlen in R in L ist. Die Einpunktkompaktifizierung von $\overline{c(G)}$ ist eine kompakte fasttopologische Unterhalbgruppe der Einpunktkompaktifizierung von L, in der eine submonogene Halbgruppe dicht ist, und die die Voraussetzungen von (3.17, b) erfüllt. Also enthält sie nach dem dort Bewiesenen eine Einparameterhalbgruppe, die das Verlangte leistet.

Man vergleiche zu dieser Bemerkung verschiedene Argumentationen in [*12*], S. 265 ff. insbesondere Th. 8.7.1. Ferner sei in diesem Zusammenhang auch auf [*26*] verwiesen, wo die angularen Halbgruppen von lokalkompakten abelschen Gruppen bestimmt werden. Im Satz III dieser Arbeit wurde gezeigt, daß jede in der induzierten Topologie lokalkompakte Unterhalbgruppe einer kompakten Gruppe eine offene und kompakte Untergruppe ist. In dieser Behauptung ist das Wort „offen" zu streichen, denn in der Torusgruppe T^2 ist die Untergruppe T nicht offen.

Da nun für $C_0 \in \mathfrak{F}(H)$ stets $H_0 C_0/C_0$ in HC_0/C_0, aber nicht in C_0/C_0 enthalten und HC_0/C_0 eine Einparameterhalbgruppe ist, muß $H_0 C_0/C_0 = HC_0/C_0$ gelten, d.h. $H_0 C_0/C_0$ ist eine Einparameterhalbgruppe. Demnach gilt $\mathfrak{F}(H) \subseteq \mathfrak{F}(H_0)$ und wegen $C_2 \notin \mathfrak{F}(H)$ entfällt die Gleichheit. Somit gilt $H < H_0$. Dies ist aber unverträglich mit der Maximalität von H.

(3.19) *Es gibt eine kompakte zusammenhängende topologische Halbgruppe K mit einer dichten submonogenen Unterhalbgruppe $f(G)$, für die $C = K$ ist.*

(Dieses Beispiel wurde von K. ZELLER vorgeschlagen.)

Beweis. K sei die eindimensionale Torusgruppe aller reellen Zahlen modulo 1. Es sei $(d_i\colon i \in N)$ eine Folge dyadischer positiver Rationalzahlen $d_i = m_i/2^{n_i}$, $m_i, n_i \in N$ in der jede positive dyadische Rationalzahl $m/2^n$ unendlich oft vorkommt. Ist $\bar{q}$ eine beliebige reelle Zahl, so bezeichnen wir im folgenden mit $\bar{q}$ ihre Restklasse modulo 1. Wir definieren nun eine zeilenfinite Matrix $(\bar{q}_{ij})_{i,j \in N}$ dyadischer Rationalzahlen modulo 1; mit $j(i)$ werde der kleinste Index bezeichnet, so daß $q_{ik} = 0$ für $k > j(i)$ gilt. Die definierenden Rekursionsvorschriften zur Bildung der Matrix lauten folgendermaßen:

a) $q_{11} = m_1$ (d.h. $\bar{q}_{11} = \bar{1}$).

b) $q_{ij+1} = \frac{1}{2} q_{ij}$ (d.h. $2\bar{q}_{ij} = \bar{q}_{ij+1}$) für $j < j(i)$; dabei ist $j(i)$ so bestimmt, daß $q_{ij(i)} < 1/i$ und $j(i) > n_i$ gilt, wo $d_i = m_i/2^{n_i}$ ist.

c) Für $i>1$ gelte $q_{i1}=m_i+\frac{1}{2}q_{i-1,j(i-1)}$ (daraus folgt $2\bar{q}_{i1}=\bar{q}_{i-1,j(i-1)}$).

Ist nun $\bar{d}$ eine beliebige Rationalzahl modulo 1 und U eine zusammenhängende offene Umgebung $\bar{d}$ derart, daß die Komponenten des Urbildes in der einfach zusammenhängenden Überlagerungsgruppe R' die Länge ε haben. Dann suchen wir ein $d_i=m_i/2^{n_i}$ mit $1/i-1<\varepsilon$. Das Matrixelement $q_{in_i}=m_i/2^{n_i}+q_{ij(i)}/2^{n_i}$ liegt dann modulo 1 sicher in U. Die Folge der Quadratwurzeln von $\bar{1}$, die durch die Elemente $\bar{q}_{ij}$ gebildet sind, liegen in der Untergruppe $Z(2)^\infty$ von K und damit in K dicht. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Dieses Beispiel läßt sich auf analoge Weise statt mit $Z(2^\infty)$ mit jeder Gruppe $Z(p^\infty)$ für jede Primzahl p und durch eine leichte Verallgemeinerung für ein abzählbares direktes Produkt $\Pi\{Z(p_i^\infty)\colon p_1<p_2<\cdots\}$ durchführen, das man sich in eine Torusgruppe abzählbarer Dimension dicht eingebettet denken kann. An die Stelle der eindimensionalen Torusgruppe in dem oben durchgeführten Beispiel kann also jede beliebige Torusgruppe mit nicht überabzählbarer Dimension treten.

Für den Fall $C=K$ gilt der folgende Satz, den man, wie Beispiele dartun, von denen wir eines anführen, nicht mehr verschärfen kann:

(3.20) *Ist K eine fasttopologische kompakte Halbgruppe mit einer dichten submonogenen Unterhalbgruppe $f(G)$, und gilt $C=K$, so ist die Zusammenhangskomponente $\underline{C}'$ von 1 in $\underline{C}=\underline{K}$ kompakt; $\underline{C}/\underline{C}'$ ist eine total unzusammenhängende Gruppe mit einer Umgebungsbasis von kompakten und offenen Untergruppen U für das Neutralelement 1, so daß $(\underline{C}/\underline{C}')/U$ eine Torsionsgruppe ist, die zu einer Untergruppe der additiven Gruppe aller rationalen Zahlen modulo 1 mit der diskreten Topologie isomorph ist. Ist G scharf submonogen zum Teiler q, so ist diese Gruppe monogen und $\underline{C}/\underline{C}'$ ist ein projektiver Limes monogener endlicher Gruppen mit zu q primer Ordnung, und $\underline{C}$ ist kompakt.*

Beweis. Der algebraische Homomorphismus f von G in die Gruppe $\underline{C}$ läßt sich zu einem algebraischen Homomorphismus f von G' in $\underline{C}$ fortsetzen. $\underline{C}'$ kann keine zu einer Vektorgruppe R^n, $n>0$ isomorphe Untergruppe enthalten (3.16) und ist daher kompakt. Nach dem Prinzip des homomorphen Bildes betrachten wir weiterhin $\underline{C}$ als total unzusammenhängend. Es gibt dann beliebig kleine offene und kompakte Untergruppen U, so daß also die Faktorgruppe $\underline{C}/U$ immer diskret ist. Jetzt sei $\underline{C}$ also sogar diskret. Daher ist $\underline{C}=f(G')$. Nun kann f nicht eineindeutig sein, denn in diesem Fall wäre $\underline{C}=\cap\{\overline{f((0,r)\cap G)}\colon 0<r\}$ leer. Es gibt also einen algebraischen Homomorphismus f_0 von G' auf eine submonogene Untergruppe G'' der Gruppe T aller reellen Zahlen modulo 1, die der Faktorgruppe von G' nach einer monogenen Untergruppe isomorph ist, und es gibt ferner einen algebraischen Homomorphismus f_1 von G'' auf $\underline{C}$. Es gibt nun zwei Mengen P und P' von Primzahlen, von denen jede eine Primzahl höchstens einmal enthält und die leeren Durchschnitt haben, so daß G'' das direkte algebraische Produkt Prüferscher Gruppen $Z(p^\infty)$, $p\in P$ und monogener Gruppen $Z(p^{n_p})$, $p\in P'$ von Primzahlpotenzordnung ist. Das direkte Produkt ist eindeutig bestimmt, die Faktoren sind

charakteristisch. Ist G scharf submonogen und von $(1/q^i: i \in N)$ erzeugt, so ist $P=\{q\}$, d.h. G'' enthält nur eine Prüfersche Untergruppe, und P' ist endlich; denn ist der Kern von f_0 von r erzeugt, so ist $\{Z(p^{n_p}): p \in P'\}$ isomorph zu der Faktorgruppe $\langle 1\rangle/\langle r\rangle$. Infolge der Eindeutigkeit der Produktzerlegung für G'' gibt es eine Teilmenge P_1 von P und eine Teilmenge P_1' von P' derart, daß $f_1(G'')=\underline{C}$ dem direkten Produkt der Prüferschen Gruppen $Z(p^\infty)$, $p \in P_1$ und der monogenen Gruppen $Z(p^{m_p})$, $p \in P_1'$, $m_p | n_p$ isomorph ist. Der erste Teil der Behauptung, der beliebige submonogene Halbgruppen G betrifft, ist damit schon bewiesen. Es steht aber darüber hinaus fest, daß P_1 in P echt enthalten ist. Dies folgt daraus, daß für jede Nullfolge $(r_i: i \in N)$ auf G, für die die Folge $f_1(f_0(r_i))$ gegen ein Element c konvergiert, ein $j \in N$ vorhanden ist, so daß für alle $i > j$ stets $f_1(f_0(r_i))=c$ ist, da doch $\underline{C}=\underline{\underline{K}}$ diskret ist. Dies ist nur dann möglich, wenn der Kern von $f=f_1 \circ f_0$ auf G' in der Intervalltopologie nicht diskret, also nicht monogen ist, da anderenfalls f alle Elemente in einem hinreichend kleinen Intervall um 0 in G' eineindeutig abbilden müßte, was gerade eben widerlegt wurde. Ist nun G scharf submonogen, so ist $P_1=\emptyset$, da P nur eine Primzahl enthält. Also ist $\underline{C}$ eine endliche monogene Gruppe, die algebraisch dem direkten Produkt $\{Z(p^{m_p}): p \in P_1'\}$ isomorph ist. Kehren wir nun wieder zum allgemeinsten Fall zurück, so ist, falls G scharf submonogen vorausgesetzt wird, für alle offenen und kompakten Untergruppen $U\,C'/C'$ von $\underline{C}/C'$ die Faktorgruppe endlich monogen mit zu q primer Ordnung; das bedeutet aber gerade, daß $\underline{C}/C'$ kompakt und projektiver Limes endlicher monogener Gruppen ist. Aus der Kompaktheit von $\underline{C}/C'$ und der Kompaktheit von C' folgt dann diejenige von $\underline{C}$ selbst. Den Inhalt des Satzes (3.20) erläutern wir an einem Beispiel:

G_q' bezeichne die von $(1/q^i: i \in N)$ mit einer natürlichen Zahl q erzeugte submonogene Untergruppe von R'. Die abgeschlossene Hülle dieser additiven rationalen Gruppe in dem vollständigen p-adischen Körper über dem Körper der rationalen Zahlen sei mit K bezeichnet. Ist $(p, q)=1$, so ist jedes Element von K Grenzwert einer Folge $(r_i: i \in N)$ auf G_q' in der p-adischen Topologie, die bezüglich der Intervalltopologie gegen 0 konvergiert. Zum Beweis der Behauptung setzen wir $C=\bigcap\{\overline{(0, r)\cap G_q'}: 0<r\}$. Da wegen $(p, q)=1$ die Gruppe G_q' ganz im Bewertungsideal des vollständigen rational-p-adischen Körpers enthalten ist, welches in der p-adischen Topologie kompakt ist, ist auch $K=\underline{K}$ eine kompakte topologische Gruppe, und $\underline{C}=C$ ist eine kompakte topologische Untergruppe. Ist s ein beliebiges Element aus G_q', so gilt $sC \subseteq \bigcap\{s\overline{(0, r)\cap G_q'}: 0<r\} \subseteq \bigcap\{\overline{(0, rs)\cap G_q'}: 0<r\}=C$. C ist also ein Unterring von K in dem p-adischen Körper, der jedenfalls dann ganz G_q' enthält, wenn $1 \in C$; da G_q' in K dicht ist, haben wir dann $C=K$, womit die Behauptung bewiesen wäre. Nun gibt es zu jeder natürlichen Zahl i eine natürliche Zahl $n_i > i$ derart, daß $q^{n_i} \equiv 1\ (p^i)$, denn wegen $(q, p)=1$ gehört q zu der endlichen multiplikativen Gruppe der zu p^i primen Restklassen. Die Folge $(1/q^{n_i}: i \in N)$ konvergiert wegen $1-1/q^{n_i}=\dfrac{q^{n_i}-1}{q^{n_i}} \equiv 0\ (p^i)$ p-adisch gegen 1, und gegen 0 in

der Intervalltopologie. Also liegt 1 in der Tat in C, was zu zeigen war. Derselbe Beweis zeigt auch, daß in dem vollständigen rational-p-adischen Körper selbst jedes Element p-adischer Grenzwert einer rationalen Nullfolge in der Ordnungstopologie auf dem rationalen Körper ist.

Nun sei T die eindimensionale Torusgruppe, und f' ein algebraischer Homomorphismus von G_2' in T, für den die Folge $\left(f'(2^{-i}): i \in N\right)$ in T dicht ist; ein solcher Homomorphismus existiert nach (3.19). Den algebraischen Homomorphismus f von G_2' in die kompakte topologische Gruppe $T \times K$ (etwa mit $p=3$) definieren wir durch $f(r)=\left(f'(r), r\right)$; da nun $T \times \langle 0 \rangle$ zu C gehört (wobei jetzt C zu f gebildet ist) und die Projektion von C auf den Faktor K nach dem vorhergehenden ganz K enthält, ist $C=T \times K$.

(3.21) *K sei eine kompakte fasttopologische Halbgruppe mit einer dichten submonogenen Unterhalbgruppe $f(G)$; es sei $\underline{C} \neq \emptyset$, $\underline{C} \neq \underline{K}$, und h sei ein stetiger algebraischer Homomorphismus von R in $\underline{K}$, für den $g(r)=\varrho\left(h(r)\right)=\varrho\left(f(r)\right)$ für alle $r \in G$ gilt; die Existenz eines solchen algebraischen Homomorphismus ist durch (3.18) gesichert. Die Abbildung $r \to C(r)$ von R in die Menge aller abgeschlossenen Untergruppen von $\underline{C}$ sei definiert wie in* (3.15). *Auf dem direkten Produkt $h(R) \times \underline{C}$ definieren wir eine Äquivalenzrelation σ:*

$\left(h(r_1), c_1\right)$ σ $\left(h(r_2), c_2\right)$ gelte dann und nur dann, wenn $h(r_1)=h(r_2)$ und $c_1 c_2^{-1} \in C(r_1)$ ist.

σ ist eine Kongruenzrelation und $\left(h(R) \times \underline{C}\right)/\sigma$ ist isomorph zu $\varrho^{-1}\left(g(R)\right)$.

Wir setzen $j_3=\begin{cases}\inf\{r:\ r \in R,\ h(r) \in D\}, & \text{falls } h(R) \cap D \neq \emptyset. \\ \infty, & \text{falls } h(R) \cap D = \emptyset.\end{cases}$ *Die Abbildung $r \to C(r)$ ist auf $[j_3, \infty)$ konstant, d.h. es gilt $C(r)=C(j_3)$ für alle $r \geqq j_3$; insbesondere ist $\varrho^{-1}\left(g([j_3, \infty))\right)$ isomorph zu dem direkten Produkt $h\left([j_3, \infty)\right) \times \underline{C}/C(j_3)$. Es sind folgende Fälle denkbar:*

a) $D=A$.

b) $D \neq A$, $j_3=\infty$.

c) $D \neq A$, $j_3 \neq \infty$.

In den Fällen a) *und* b) *ist h Isomorphismus; in den Fällen* b) *und* c) *ist $\varrho(D)$ eine zusammenhängende und kompakte abelsche Gruppe, in der eine Einparametergruppe dicht ist.*

Beweis. Ist $j_3<\infty$, so liegt $\underline{C}h(j_3)$ in $\underline{D}$: Ist nämlich $c=\lim f(r_i)$ mit $\lim r_i=0$, $r_i \in G$ ein beliebiges Element aus $\underline{C}$, und gilt $x=\lim f(r_i') \in \underline{D}$ mit einer unbeschränkten Folge $(r_i': i \in N)$, so gilt $xc=\lim f(r_i)\, f(r_i')=\lim f(r_i+r_i')$ mit einer unbeschränkten Folge $(r_i+r_i': i \in N)$; also gehört xc zu $\underline{D}$, was mit $x=h(j_3)$ behauptet war. Ist $r>j_3$ ein beliebiges Element aus R oberhalb j_3 und ist $c \in C(r)$, so gilt auch $c \in C(j_3)$; denn gilt $xc=x$ für alle $x \in \varrho^{-1}\left(g(r)\right)$, so existiert zu jedem solchen x, das nach dem eben Gezeigten in der Gruppe $\underline{D}$ liegt, ein $y \in \underline{D}$, mit dem $xy=h(j_3)$ gilt; dann ist $xyc=h(j_3)c=xy=h(d)$;

daraus folgt aber $c \in C(j_3)$. Damit ist die Konstanz von $C(r)$ auf $[j_3, \infty)$ nachgewiesen.

Daß σ eine Kongruenzrelation darstellt, ist sofort zu sehen. Die stetige algebraisch homomorphe Abbildung $\big(h(r), c\big) \to h(r)c$ von $h(R) \times C$ in $\varrho^{-1}\big(g(R)\big)$ läßt sich zerlegen in den Homomorphismus σ: $\big(h(r), c\big) \to \sigma\big(h(r), c\big)$ von $h(R) \times C$ auf den Quotientenraum $\big(h(R) \times \underline{C}\big)/\sigma$ und den algebraischen Isomorphismus p: $\big(h(r), c\big) \to h(r)c$, der auf Grund einer wichtigen Eigenschaft der Quotiententopologie stetig ist (vgl. z.B. [1]).

Um zu zeigen, daß p ein Isomorphismus ist, haben wir die Offenheit von p nachzuweisen, oder, was dazu ausreichend ist, diejenige von $\big(h(r), c\big) \to h(r)c$. Jeder Punkt $\big(h(r), c\big)$ aus $h(R) \times \underline{C}$ hat eine Umgebung der Form $h\big((r_1, r_2)\big) \times cVC(r)$, wo $r_1 < r < r_2$ und V eine kompakte Umgebung von 1 in $\underline{C}$ ist. Wäre $h\big((r_1, r_2)\big) cVC(r)$ keine Umgebung von $h(r)c$ in $h(R)\underline{C}$, so gäbe es ein Netz $\big(h(s_i)c_i : i \in L\big)$, das auf $\varrho^{-1}\big(g((r_1, r_2))\big)$ gegen $h(r)c$ konvergieren würde, ohne $h\big((r_1, r_2)\big) cVC(r)$ zu treffen. Infolge der Stetigkeit von h gilt $\lim_L h(s_i) = h(r)$; da K kompakt und fasttopologisch ist, können wir $\lim_L c_i = c_i \in \underline{C}$ annehmen; es folgt dann $c'c^{-1} \subset C(r)$ und für alle hinreichend großen $i \in L$ wäre c_i in der Umgebung $Vc(c'c^{-1})$ von c' enthalten. Dann ist aber auch für alle hinreichend großen $i \in L$ alle Netzelemente $h(s_i)c_i$ in $h\big((r_1, r_2)\big) cVC(r)$ enthalten im Widerspruch zur Annahme.

g ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $j_3 = \infty$. Nach dem allerersten Beweisschritt ist diese Bedingung notwendig, denn ist g ein Isomorphismus, dann auch h; ist e das Neutralelement von $\underline{D}$, so ist h': $r \to eh(r)$ ein Homomorphismus von R in D, der sich zu einem Homomorphismus von R' in D fortsetzen läßt. Ist $h(R) \cap \underline{D} \neq \emptyset$, dann gilt $\underline{D} = \overline{h\big([j_3, \infty)\big)\underline{C}}$, denn einerseits gilt $h\big([j_3, \infty)\big)\underline{C} \subseteq \underline{D}$, aber andererseits enthält $\overline{h\big([j_3, \infty)\big)\underline{C}}$ die Teilmenge $f\big([j_3, \infty)\big)$ und damit $\underline{D}$. Dies ist aber unverträglich mit der Isomorphie von h, da dann $h'(R')$ als isomorphes Bild von R' in der Gruppe $\underline{D}$ abgeschlossen und $h\big([j_3, \infty)\big)\underline{C}$ dem direkten Produkt $h\big([j_3, \infty)\big) \times \underline{C}/C(j_3)$ isomorph ist, kann dieses Produkt nicht in $h'(R')\underline{C}$ dicht sein; denn eine zu R' algebraisch stetig isomorphe Einparametergruppe ist entweder isomorph zu R' oder in einer kompakten Gruppe dicht.

Ist umgekehrt $j_3 = \infty$, so ist $h(R)$ ein isomorphes Bild von R, denn das Bild eines jeden beschränkten offenen Intervalls U auf $R \setminus \{0\}$ ist eine Umgebung eines jeden seiner Bildpunkte in $h(R)$, weil es anderenfalls unbeschränkte Folgen $(r_i : i \in N)$ auf R geben müßte, deren Bild gegen einen Punkt des Bildes von U konvergieren müßte, was durch $j_3 = \infty$ gerade ausgeschlossen ist. Mit $h(R)$ ist aber auch $g(R)$ ein isomorphes Bild von R.

Ist $j_1 < \infty$, so ist, wie schon gezeigt, $\overline{h'(R')}$ eine kompakte, zusammenhängende abelsche Gruppe, und das Produkt dieser kompakten Untergruppe mit der abgeschlossenen Untergruppe $e\underline{C}$ ist abgeschlossen in $\underline{D}$ und stimmt daher mit $\underline{D}$ überein. Wenn C kompakt und zusammenhängend ist, ist auch $\underline{D}$ kompakt und zusammenhängend; $\varrho(R) = \underline{D}/e\underline{C}$ ist kompakt und zusammenhängend.

Nun sei $\underline{D} \neq 0$, aber $j_3 = \infty$; dann ist $\varrho(h(R)) = g(R)$ isomorphes Bild von R und $\varrho(h'(R'))$ ist dicht in $\varrho(\underline{D}) = \underline{D}/\underline{C}e$. Nach Definition von $\underline{D}$ gibt es eine unbeschränkte Folge $(r_i: i \in N)$ aus R und einen Punkt $d \in \underline{D}$ derart, daß $\varrho(d) = \lim g(r_i)$; dann ist aber auch $\varrho(d) = \lim \varrho(e)\, g(r_i) = \lim \varrho(h'(r_i))$; dann ist $\varrho \supset h'$ aber kein Isomorphismus von R' und $\varrho(\underline{D}) = \underline{D}/\underline{C}e$ ist eine kompakte Gruppe. Dann ist aber auch h' sicher kein Isomorphismus von R' in $\underline{D}$, denn die Zusammenhangskomponente des Neutralelementes im Kern $\underline{C}e$ des Homomorphismus ϱ von $\underline{D}$ auf $\underline{D}/\underline{C}e$ ist kompakt.

(3.22) *Die Fälle* a), b), c) *aus der vorigen Nummer treten allesamt auch wirklich auf.*

Beweis. Für a) ist dies trivial; für c) ist ein Beispiel sofort anzugeben: [Vgl. hierzu (1.14), (2.6), (2.7).] Es sei h' ein stetiger algebraischer Isomorphismus von R auf eine dichte Unterhalbgruppe einer kompakten und zusammenhängenden topologischen Gruppe $\underline{D}$. Auf dem Vereinigungsraum $[0, 1) \cup \underline{D}$ definieren wir eine Topologie, indem wir einen Punkt $x \in \underline{D}$ als Basis für den Filter seiner Umgebungen seinen Umgebungsfilter in $\underline{D}$ zu ordnen, sofern nicht $x = h'(1)$ ist; in diesem Fall sollen die Mengen $(r, 1) \cup U$ eine Basis für die Umgebungen von x bilden, wobei $0 \leqq r < 1$ gilt und U die Umgebungen von x in $\underline{D}$ durchläuft. Auf $[0, 1)$ wird wie auf $\underline{D}$ die dort als Intervalltopologie gegebene Topologie betrachtet. Der kompakte topologische Raum $[0, 1) \cup \underline{D}$ wird zu einer topologischen Halbgruppe, wenn die auf $[0, 1) \cup h'(R)$ durch

$$x \circ y = \begin{cases} x\,y, \text{ wenn } x, y \in \underline{D} \\ x + y, \text{ wenn } x, y \text{ und } x + y \in [0, 1) \\ h'(x + y), \text{ wenn } x, y \in [0, 1),\ x + y \in [0, 1) \\ h'(x)\,y, \text{ wenn } x \in [0, 1) \text{ und } y \in \underline{D} \end{cases}$$

definierte assoziative und stetige Verknüpfung durch Stetigkeit auf $[0, 1) \cup \underline{D}$ fortgesetzt wird.

Nun sei wieder h' ein stetiger algebraischer Homomorphismus von R auf eine dichte Unterhalbgruppe einer kompakten Gruppe $\underline{D}$. Zu jedem Punkt $x \in \overline{h'(R)} = D$ gibt es eine Basis von Umgebungen U mit der Eigenschaft, daß $h'^{-1}(h'(R) \cup U)$ aus unendlich vielen beschränkten Intervallen besteht; diese bezeichnen wir mit $V(U, i)$, $i \in N$. Auf der Vereinigungsmenge $R \cup D$ definieren wir eine Topologie, indem wir allen Punkten, die nicht auf $h'(R)$ liegen, als Basis für den Filter ihrer Umgebungen ihren Umgebungsfilter in R bzw. $\underline{D}$ zuordnen, und einem Punkt $x \in \overline{h'(R)} = D$ als Umgebungsbasis die Menge der Mengen $\{U \cup V(U, i)$: Es gibt eine endliche Teilmenge F von N, so daß $i \in N \setminus F\}$, wobei die oben beschriebene Umgebungsbasis von x durchläuft und F die Menge aller endlichen Teilmengen von N. Mit der so definierten Topologie ist $R \cup \underline{D}$ eine zusammenhängende, kompakte Halbgruppe, wenn

als Verknüpfung

$$x \circ y = \begin{cases} xy, & \text{wenn } x, y \in D \\ x + y, & \text{wenn } x, y \in R \\ x\,h'(y), & \text{wenn } x \in \underline{D},\ y \in R \end{cases}$$

festgesetzt wird. Auf eine genauere Beschreibung des skizzierten Gedankenganges verzichten wir.

Unsere bisherigen Bemühungen galten fast ausschließlich dem Fall, daß $\underline{C}$ nicht leer ist. Nun wenden wir uns dem Fall zu, daß $\underline{C}$ keine Elemente enthält.

(3.23) *K sei eine kompakte, eigentlich fasttopologische Halbgruppe mit einer dichten submonogenen Unterhalbgruppe $f(G)$. Es sei $C=\{a\}$ und $D \cap f(G)=\emptyset$. Dann ist $\underline{K}$ diskret.*

Beweis. Wenn $\underline{K}$ nichtdiskret ist, dann gibt es ein $r \in G$ und eine nicht konstante Folge $(r_i\colon i \in N)$ auf G derart, daß $f(r)=\lim f(r_i)$ gilt, ohne daß die Folge $(r_i\colon i \in N)$ ein konstantes Endstück oder auch eine konstante Teilfolge hätte: Wegen $C=\{a\}$ und $D \cap f(G)=\emptyset$ enthält $(r_i\colon i \in N)$ keine Nullfolge und ist beschränkt; sie liegt etwa in dem Intervall $[s, t]$ mit $0<s$. Es gibt dann eine Teilfolge, die gegen $v \in [s, t]$ konvergiert. Es sei also o.B.d.A. $\lim r_i = v \in R$ in der Intervalltopologie. Nun wählen wir Teilfolgen $(r_{j_i}\colon i \in N)$ und $(r_{k_i}\colon i \in N)$ mit $r_{j_i} < r_{k_i}$; wegen $\lim r_i = v$ konvergiert die Folge der $s_i = r_{k_i} - r_{j_i}$ bezüglich der Intervalltopologie gegen 0. Es gilt $f(r_{k_i}) = f(r_{j_i})\, f(s_i)$. Da aber $\lim f(r_{k_i}) = \lim f(r_{j_i}) = f(r) \neq \{a\}$ ist, und alle Häufungspunkte von $\big(f(s_i)\colon i \in N\big)$ in C liegen und demnach mit a zusammenfallen, und weil die Multiplikation $(x, y) \to xy$ allenfalls in (a, a) unstetig ist, sind wir bei einem Widerspruch angelangt. Es sei angemerkt, daß wir hier wieder in vollem Umfang die Eigenschaften einer fasttopologischen Halbgruppe ausgenützt haben, für die (a, a) auch wirklich die einzige Unstetigkeitsstelle ist. Daß für beliebige lokalkompakte topologische Halbgruppen, in denen eine submonogene Halbgruppe dicht ist, der Satz im allgemeinen nicht richtig ist, zeigt eine leichte Abwandlung eines in (3.3) gegebenen Beispiels: G sei eine submonogene Unterhalbgruppe von $R \setminus \{0\}$ auf der die gröbste Topologie betrachtet wird, die auf $(0, 1) \cap G$ die diskrete und auf $[1, \infty) \cap G$ die Intervalltopologie induziert. Dann ist G in der lokalkompakten topologischen Halbgruppe $\underline{K} = G \cup [1, \infty)$ dicht und es gilt $C = D = \{a\}$, aber $\underline{K}$ ist nicht diskret.

(3.24) *K sei eine kompakte eigentlich fasttopologische Halbgruppe mit einer dichten submonogenen Unterhalbgruppe $f(G)$. Es sei $C=\{a\}$ und f sei nicht eineindeutig, und zwar gelte mit den Bezeichnungen von* (1.6) $j_1 \leqq j_2 < \infty$. *Dann ist $\underline{K}$ diskret.*

Der Beweis des vorigen Satzes läßt sich sofort übernehmen, wenn wir zeigen können, daß auch unter den jetzigen Voraussetzungen die dort

behandelte Folge $(r_i: i \in N)$ beschränkt ist. Nun gibt es aber zu jedem $r_i > j_2$ ein $r_i' \leqq j_2$ mit $f(r_i) = f(r_i')$. Wir können daher annehmen, daß die Folge $(r_i: i \in N)$ in $[0, j_2)$ enthalten ist.

(3.25) *K sei eine kompakte eigentlich fasttopologische Halbgruppe mit einer dichten submonogenen Unterhalbgruppe $f(G)$; es sei $\underline{C} = \emptyset$, $\underline{D} \neq \emptyset$. Es gibt ein im allgemeinen nicht eindeutig bestimmtes Element $j \in R \cup \{\infty\}$, $j > 0$, derart, daß $f\big((0, j) \cap G\big)$ diskret und $f\big((j, \infty) \cap G\big)$ in $\underline{D}$ dicht ist. Bezeichnet σ diejenige Äquivalenzrelation, die die Klassen $\sigma(x) = \{x\}$ für $x \notin \underline{D}$ und $\sigma(x) = \underline{D}$ für $x \in \underline{D}$ hat, dann ist $x \to \sigma(x)$ ein Homomorphismus von $\underline{K}$ auf den Restklassenraum $\underline{K}/\sigma$, den wir auch mit $\underline{K}/\underline{D}$ bezeichnen. Das Element $\bar{e} = \sigma(\underline{D})$ ist ein Idempotent von $\underline{K}/\underline{D}$ und zwar ein Nullelement.*

Beweis. Da $\underline{D}$ ein in $\underline{K}$ abgeschlossenes Ideal ist, sind die Behauptungen über σ evident. Für alle unbeschränkt wachsenden Zahlenfolgen $(r_i: i \in N)$ gilt $\lim \sigma\big(f(r_i)\big) = \bar{e}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) $\sigma \circ f$ ist eineindeutig,

b) $\sigma \circ f$ ist nicht eineindeutig.

Im Fall a) erfüllt $\underline{K}/\underline{D}$ die Voraussetzungen von (3.23) mit $\{\bar{e}\}$ an Stelle von D. Dann ist also $\underline{K}/\underline{D} \setminus \{\bar{e}\}$ diskret; dann ist aber auch $\underline{K} \setminus \underline{D}$ diskret, denn dieser Teilraum wird von σ isomorph abgebildet. Da $f(G)$ in $\underline{K} \setminus \underline{D}$ dicht ist, da ja $f(G) \cap \underline{D} = \emptyset$ ist, ist $f(G) = \underline{K} \setminus \underline{D}$ diskret, häuft sich aber gegen D, d.h. $\overline{f(G)}$ ist nicht diskret in K, sondern enthält D. In diesem Fall ist $j \leqq \infty$.

Im Fall b) ist die Menge $\{r: r \in G, \sigma\big(f(r)\big) = \bar{e}\}$ ein Ideal in G mit der unteren Grenze j_4. Nach (3.24) ist $\underline{K}/\underline{D} \setminus \{\bar{e}\}$ diskret; daher ist $f\big((0, j_4)\big)$ diskret und D ist die Hülle von $f\big([j, \infty) \cap G\big)$. Ist $j_4 = 0$, so ist $f(G) = \underline{D}$ eine Gruppe; für alle positiven reellen Zahlen j ist dann $f\big([0, j) \cap G\big)$ diskret und $\overline{f\big((j, \infty) \cap G\big)} = \underline{D}$; es sei nämlich etwa $0 \leqq r \leqq j$ und $f(r) = \lim f(r_i)$ mit einer $[0, j)$ gelegenen Folge $(r_i: i \in N)$; o.B.d.A. können wir annehmen, daß die Folge $(r_i: i \in N)$ auf dem kompakten Intervall $[0, j)$ bezüglich der Intervalltopologie gegen einen Punkt s dieses Intervalls konvergiert, der natürlich nicht in G gelegen zu sein braucht. Wir können aus der Folge $(r_i: i \in N)$ zwei gegen s konvergente Teilfolgen $(r_{n_i}: i \in N)$ und $(r_{m_i}: i \in N)$ auswählen, für die $r_{n_i} < r_{m_i}$ gilt, denn von konstanten Folgen $(r_i: i \in N)$ können wir absehen. Wegen $\underline{C} = \emptyset$ gilt $\lim f(r_{m_i} - r_{n_i}) = a$ und weil K fasttopologisch ist, bekommen wir $f(r) = \lim f(r_{m_i}) = \lim f(r_{m_i} - r_{n_i})\, f(r_{n_i}) = a f(r) = a$ und dies ist ein Widerspruch.

Daß Halbgruppen von der in dieser Nummer geschilderten Bauart existieren, sieht man mit Hilfe von Konstruktionsmethoden, die den in (3.21) beschriebenen ähnlich sind. Entsprechende Konstruktionen findet man zum Teil in der Literatur (s. z.B. [11]); auf ausführliche Darstellung verzichten wir an dieser Stelle.

(3.26) *K sei eine kompakte, eigentlich fasttopologische Halbgruppe, in der eine submonogene Halbgruppe dicht sei. Es sei $\underline{C} = \emptyset$, $\underline{D} \neq \emptyset$, $f(G) \cap \underline{D} \neq \emptyset$. Dann*

ist entweder G monogen und $\underline{D}$ ist kompakt oder G ist nicht monogen, in welchem Fall $\underline{D}$ nicht kompakt und nicht zusammenhängend ist. Zu jeder kompakten und offenen Untergruppe U von D existiert ein Element $x_U \in G$ und eine natürliche Zahl m derart, daß $U = \overline{f(m x_U + \langle x_U \rangle)}$.

Ist G monogen, so ist die von $ef(G)$ in der lokalkompakten Gruppe $\underline{D}$ erzeugte monogene Gruppe dicht; daher ist $\underline{D}$ kompakt.

Beweis. G sei nun nicht monogen. Dann kann $\underline{D}$ nicht kompakt sein. Wäre nämlich $(r_i : i \in N)$ eine Folge unendlich vieler verschiedener Erzeugender von G, so würde die Folge $\big(f(r_i) : i \in N\big)$ wegen $C = a$ gegen a konvergieren. Wäre aber $\underline{D}$ kompakt, so würde mit dem Neutralelement e von $\underline{D}$ die in $\underline{D}$ liegende Folge $\big(ef(r_i) : i \in N\big)$ nur in $\underline{D}$ liegende Häufungspunkt haben, während diese Folge doch gegen a konvergieren müßte, da K fasttopologisch ist.

Die folgende Bemerkung ist eine Fortführung des in (3.10) für C entwickelten Prinzips der homomorphen Abbildung: Ist D_0 eine abgeschlossene Untergruppe von $\underline{D}$, so ist die Äquivalenzrelation σ_0, deren Klassen für $x \notin \underline{D}$ aus x und für $x \in \underline{D}$ aus xD_0 bestehen, eine Kongruenzrelation, und die Abbildung $x \to \sigma_0(x)$ ist ein Homomorphismus von K auf die Restklassenstruktur K/σ_0, die wir auch mit K/D_0 bezeichnen. Wir zeigen jetzt, daß $\underline{D} = \overline{f\big([j_4, \infty)\big)}$ nicht zusammenhängend ist. Die lokalkompakte abelsche Gruppe $\underline{D}$ kann keine Untergruppe enthalten, die zu einer Vektorgruppe R'^n, $n > 0$ isomorph ist; dies wurde in (3.16) für $\underline{C}$ bewiesen und gilt hier gleichermaßen, da sich sonst $f\big([j_4, \infty) \cap G\big)$ als dichte Untergruppe in R'^n projizieren lassen müßte, was nicht möglich ist. Dann enthält $\underline{D}$ eine kompakte und offene Untergruppe U (s. z.B. [*19*], [*25*]).

Die Halbgruppe K/U ist wegen der Kompaktheit von U fasttopologisch mit dem Ausnahmepunkt $aU = \{a\}$, $\underline{K}/U$ ist wegen der Offenheit von U in D und wegen der Diskretheit von $f\big([0, j_4) \cap G\big)$ diskret; bezeichnet σ_U den zu U gehörigen Restklassenhomomorphismus, so ist daher $\underline{K}/U = \sigma_U\big(f(G)\big)$. Zu jeder offenen und kompakten Untergruppe U von $\underline{D}$ definieren wir die Unterhalbgruppe $G_U = \{r : r \in G,\ f(r) \in U\}$ von G. Da U offen und $f(G)$ in K dicht ist, ist G_U sicher nicht leer. Da U eine Gruppe ist, läßt sich f zu einem algebraischen Homomorphismus f von der von G_U in G' erzeugten Gruppe G'_U in U fortsetzen. G'_U ist diskret bezüglich der Intervalltopologie auf R': Wäre dies nämlich nicht der Fall, dann gäbe es zu einem $r \in G'_U$ eine etwa von oben gegen r konvergente Folge $(r_i : i \in N)$ auf G_U; da U kompakt ist, können wir o.B.d.A. $u = \lim f(r_i) \in U$ annehmen. Wegen $C = a$ strebt die Folge $\big(f(r_i - r) : i \in N\big)$ gegen a und da K fasttopologisch ist, strebt dann die Folge der Elemente $f(r_i - r)\, f(r)$ gegen a und nicht gegen u. Entsprechendes gilt im Fall $r > 0$ für eine Folge $(r_i : i \in N)$, die von unten gegen r strebt und in G'_U liegt. G'_U ist also eine monogene Untergruppe von G', die etwa von x_U erzeugt sei, wobei wir $x_U \in G$ wählen können. Es gilt $G_U = G'_U \cap [j_4, \infty)$. Wir setzen $m = \min\{i : f(x_U) \in U\}$. Bezeichnet man die Abbildung $\sigma_U \circ f$ mit f_U, so gilt mit den Bezeichnungen von (1.6) angewandt auf f_U jeweils $m x_U = j_1$ und $(m+1) x_U = j_2$. Das Bild $f_U([r_1, r_2])$ ist die diskrete Gruppe $\underline{D}/U$. Der Teilraum $U \setminus \overline{f(G_U)}$ ist

offen in U, und da U offen ist, auch in $\underline{K}$; wäre diese Menge nicht leer, so müßte sie ein Element von $f(G)$ enthalten, da $f(G)$ in K dicht ist. Dieses Element läge dann aber in $f(G_U)$ nach der Definition von G_U. Also ist $U=\overline{f(G_U)}$, wie behauptet.

(3.27) *Es gibt eine kompakte fasttopologische Halbgruppe K, in der eine submonogene Halbgruppe $f(G)$ dicht ist, in der $\underline{C}=\emptyset$ und $D=K$ und schließlich $\underline{D}$ nicht total unzusammenhängend ist.*

Beweis. D'' sei eine submonogene Untergruppe der eindimensionalen Torusgruppe T in der diskreten Topologie mit dem Neutralelement e, also etwa eine Prüfergruppe $Z(p^\infty)$. Es gibt einen algebraischen Isomorphismus f_0 einer submonogenen Untergruppe G' von R' in das direkte Produkt $R'\times D''$, in dem auf dem Faktor R' die natürliche Intervalltopologie betrachtet wird und in welchem die Projektion von $f_0(G')$ auf den Faktor R' eine dichte submonogene, zu G' algebraisch isomorphe Untergruppe von R' und die Projektion von $f_0(G')$ auf D'' gleich D'' ist. (Man hat dazu nur eine zu R' isomorphe Untergruppe in dem Zylinder $R'\times T$ zu suchen, in die die Untergruppe $f_0(G')$ so eingebettet wird, daß sie gerade in $R'\times D''$ liegt.) Der Durchschnitt $S=f_0(G')\cap(R'\times\langle e\rangle)$ ist eine monogene Untergruppe $\langle r\rangle\times\langle e\rangle$, nämlich der Kern der Projektion von $f_0(G')$ auf $\langle 0\rangle\times D''$; wir können $r>0$ als irrationale Zahl aus R' annehmen. Nun bezeichne f_1 den Restklassenhomomorphismus von $R\times D''$ auf $\underline{K}=(R'\times D'')/(\langle 1\rangle\times\langle e\rangle)$; diese Faktorgruppe identifizieren wir mit ihrem isomorphen Bild $T\times D''$. Da $(\langle 1\rangle\times\langle e\rangle)\cap S=\langle 0\rangle\times\langle e\rangle$, also gleich dem neutralen Element ist, wird $f_0(G')$ bei f_1 algebraisch isomorph abgebildet. Die Untergruppe $f_1(\langle r\rangle\times\langle e\rangle)$ ist dicht in T. Also ist $f_1\big(f_0(G')\big)$ dicht in $T\times D''$, und dies trifft auch schon für $f_1\big(f_0(G)\big)$ zu. K ist die Einpunktkompaktifizierung von $\underline{K}$. Wir setzen $f=f_1\circ f_0$. Nun ist $T\times\langle e\rangle$ eine kompakte und offene Untergruppe U von jenem Typ, der in (3.26) beschrieben wurde; x_U ist jetzt dasjenige Element von G', welches bei f_0 auf (r, e) abgebildet wird. Für alle $j\in G$ ist $f\big((0, j)\cap G\big)$ diskret und stimmt daher mit $f\big((0, j)\cap G\big)$ überein, d.h. $\underline{C}$ ist leer.

Man vergleiche dieses Beispiel mit dem in (3.14) angegebenen. In einer und derselben fasttopologischen kompakten Halbgruppe können zwei verschiedene submonogene Halbgruppen $f^{(1)}(G^{(1)})$ und $f^{(2)}(G^{(2)})$ so dicht sein, daß einmal $\underline{C}^{(1)}\neq\emptyset$ und das andere Mal $\underline{C}^{(2)}=\emptyset$ ist.

(3.28) *Es gibt eine kompakte, echt fasttopologische Halbgruppe K mit dichter submonogener Unterhalbgruppe $f(G)$, in der $C=\emptyset$, $D=K$ und D total unzusammenhängend ist, aber nicht diskret.*

Beweis. G' sei von der Folge $(1/p^i: i\in N)$ mit einer Primzahl p erzeugte scharf submonogene Untergruppe von R', und $\underline{K}$ sei die abgeschlossene Hülle von G' in dem vollständigen p-adischen Körper über dem Körper der rationalen Zahlen. K sei die Einpunktkompaktifizierung von $\underline{K}$. Jede in der Intervalltopologie gegen 0 konvergierende Folge hat die Form $(n_i/p^{m_i}: i\in N)$ $n_i, m_i\in N$, $(m_i: i\in N)$ nicht beschränkt, $(n_i, p)=1$. Hinsichtlich der p-adischen Topologie

konvergiert die Folge aber gegen $a \notin \underline{K}$, da die Folge der p^{m_i} gegen Null strebt und alle n_i Einheiten sind und daher in einem kompakten Teilraum von $\underline{K}$ liegen. Also ist $\underline{C}$ in der Tat leer; in $\underline{K}$ ist schon G allein dicht. Da der vollständige rational-p-adische Körper total unzusammenhängend ist, ist auch $\underline{K}$ total unzusammenhängend.

Dieses Beispiel ist ein Gegenstück zu der Klasse der in (3.20) angegebenen Beispielen. Dort war $\underline{C}=\underline{K}$, hier ist $\underline{C}=\emptyset$; dort war $\underline{K}=K$ kompakt, hier ist $\underline{K}$ nicht kompakt; dort war die zu der Erzeugendenfolge gehörige Zahl q teilerfremd zu dem die Topologie erzeugenden Primelement p, hier stimmt sie mit ihm überein.

Unsere wichtigsten Ergebnisse fassen wir jetzt zusammen in dem folgenden

HAUPTSATZ

G sei eine submonogene Unterhalbgruppe der additiven Halbgruppe aller positiven reellen Zahlen [Def. (1.2)]. *K sei eine kompakte fasttopologische Halbgruppe* [Def. (3.4)] *und f ein algebraischer Homomorphismus von G in K derart, daß $f(G)$ in K dicht ist. Falls K einen Ausnahmepunkt hat, sei dieser mit a bezeichnet; $\underline{K}$ sei gleich $K \setminus \{a\}$ in diesem Fall und gleich K sonst. Wir setzen*

$$C = \bigcap \{\overline{f((0,r) \cap G)} : 0 < r\}, \qquad \underline{C} = C \cap \underline{K} \quad \textit{und}$$

$$D = \bigcap \{\overline{f((r,\infty) \cap G)} : 0 < r\}, \quad \underline{D} = D \cap \underline{K} \quad (\text{Def. } (3.8)).$$

Dann sind $\underline{C}$ und $\underline{D}$ lokalkompakte topologische abelsche Gruppen, in denen die Zusammenhangskomponenten der Neutralelemente kompakt sind.

$\underline{K} \setminus \underline{C}$ ist das größte echte Unterideal von K; falls $\underline{C} \neq \emptyset$ ist das Neutralelement $1 \in \underline{C}$ ein Einselement von $\underline{K}$ und $\underline{C}$ die größte Untergruppe, die es enthält.

Es treten die folgenden Fälle auf:

a) $C = \{a\}$ *oder* $C = \emptyset$, $D = \{a\}$.

b) $C = \emptyset$, $D \neq \{a\}$.

c) $C = \{a\}$, $D \neq \{a\}$.

d) $C \neq \{a\}$, $D \neq \emptyset$.

In diesen verschiedenen Fällen hat $\underline{K}$ die folgende Struktur:

a) $f(G) = \underline{K}$ *und $\underline{K}$ ist diskret.*

b) *G ist monogen und sei etwa von 1 erzeugt. $\underline{D}$ ist eine kompakte abelsche Gruppe mit dem Neutralelement e, in der die von $ef(1)$ erzeugte monogene Gruppe dicht ist. (Dieser Fall ist in der Literatur eingehend untersucht: Vgl. z. B.* [11], [16].)

c) *G ist nicht monogen. $\underline{D}$ ist eine nicht kompakte und nicht zusammenhängende lokalkompakte abelsche Gruppe mit dem Neutralelement e. Wenn $f(G) \cap D = \emptyset$ gilt, dann ist f eineindeutig und $f(G)$ ist in der induzierten Topologie diskret. In allen Fällen wird jedes beschränkte Intervall $[0, j] \cap G$ bei f auf einen diskreten Teilraum abgebildet. Ist $f(G) \cap D \neq \emptyset$, so existiert zu jeder kompakten und offenen Untergruppe U von $\underline{D}$ ein wohlbestimmtes Element r_U in*

G und eine reelle Zahl j, die von U nicht abhängt, so daß $U=\overline{f([j,\infty)\cap\langle r_U\rangle}$. Insbesondere ist die Filterbasis aller offenen und kompakten Untergruppen von $\underline{D}$ abzählbar. Beispiele für diesen Fall sind in (3.27) *und* (3.28) *angegeben.*

d) *$\underline{C}$ ist eine lokalkompakte topologische abelsche Gruppe mit dem Neutralelement* 1, *in der eine submonogene Untergruppe dicht ist. Die Zusammenhangskomponente von* 1 *ist kompakt. Ist G scharf submonogen mit dem Teiler p* [Def. (1.9)], *dann ist $\underline{C}$ sogar ganz kompakt, und ist C_0 die Zusammenhangskomponente von* 1 *in $\underline{C}=C$, dann ist C/C_0 ein projektiver Limes von endlichen monogenen Gruppen mit einer zu p teilerfremden Ordnung.*

Unterfall $C=K$. Dieser Fall kann auftreten, Beispiele dafür sind in (3.19) *und* (3.20) *angeführt.*

Unterfall $C\neq K$. Es gibt einen stetigen algebraischen Homomorphismus h von R in K, so daß $\overline{Ch(R)}=K$, $\underline{C}\cap h(G)=\langle 1\rangle$; ferner existiert eine monoton nicht fallende, von oben stetige Abbildung $r\to C(r)$ von R in die Menge aller kompakten Untergruppen von $\underline{C}$ [Def. (3.15)] *für die folgendes gilt: Auf der Produkthalbgruppe $\underline{C}\times R$ sei γ diejenige Kongruenzrelation, bezüglich der zwei Punkte (c,r) und (c',r') genau dann äquivalent sind, wenn $r'=r$ und $c'c^{-1}\in C(r)$ gilt; damit ist $(\underline{C}\times R)/\gamma$ eine topologische Halbgruppe. Der stetige algebraische Homomorphismus φ: $(c,r)\to ch(r)$ von $\underline{C}\times R$ auf $\underline{C}h(R)$ in $\underline{K}$ läßt sich in kanonischer Weise zerlegen in die Hintereinanderausführung des Restklassenhomomorphismus ψ: $(c,r)\to\gamma(c,r)$ von $\underline{C}\times R$ auf $(\underline{C}\times R)/\gamma$ und einen Homomorphismus χ: $\gamma(c,r)\to ch(r)$ von $(\underline{C}\times R)/\gamma$ auf $\underline{C}h(R)$; χ ist ein lokaler Monomorphismus in allen Punkten und im Fall $D\cap h(R)=\emptyset$ sogar ein Isomorphismus. Ist $h(R)\cap\underline{D}\neq\emptyset$, so gibt es eine kleinste Zahl j in R derart, daß $h(j)\in D$. Für alle $r,s\geqq j$ gilt dann $C(r)=C(s)$ und $\underline{C}h\big([j,\infty)\big)$ ist isomorph dem direkten Produkt $\underline{C}/C(j)\times h\big([j,\infty)\big)$; $e\underline{C}$ ist isomorph $\underline{C}/C(j)$ und D ist isomorph $e\underline{C}\times\overline{h\big([j,\infty)\big)}$ wobei $\overline{h\big([j,\infty)\big)}$ eine kompakte Gruppe darstellt. D ist demnach dann und nur dann zusammenhängend, wenn $\underline{C}/C(j)$ zusammenhängend ist. Konstruktionsanweisungen zu diesem Fall findet man in* (3.22).

Um das Kernstück des Hauptsatzes, nämlich den Fall $C\subset K$, $C\neq\emptyset$, $C\neq\{a\}$ zu erläutern, geben wir dazu noch ein Beispiel an:

T^∞ sei eine Torusgruppe unendlicher abzählbarer Dimension; die Folge ihrer Untergruppen $\langle 1\rangle$, $T^i\times\langle 1\rangle\times\langle 1\rangle\ldots$, $i=1,2,\ldots$ bezeichnen wir mit $T_0, T_1, \ldots$. Wir setzen $\underline{C}=C=T^\infty\times T_{n-1}$ mit einer festen natürlichen Zahl n. Nach einer Bemerkung von (3.19) ist dies möglich. Die Abbildung $r\to C(r)$ definieren wir wie folgt:

$$C(r)=\begin{cases} T_i\times\langle 1\rangle & \text{für } r\in\left[1-\frac{1}{i+1},\ 1-\frac{1}{i+2}\right),\quad i=0,1,\ldots \\ T^\infty\times\langle 1\rangle & \text{für } r\in[1,3/2) \\ T^\infty\times T_{i+1} & \text{für } r\in\left[\frac{3}{2}+\frac{i}{2n},\ \frac{3}{2}+\frac{i+1}{2n}\right) \\ & \qquad i=0,\ldots,n-1 \\ T^\infty\times T_n & \text{für } r\in[2,\infty). \end{cases}$$

Den Homomorphismus h definieren wir durch Restklassenbildung auf R, in dem wir für alle $r \geqq 2$ die Elemente $r+i$, $i=0, 1, \ldots$ in eine Klasse zusammenfassen; der Homomorphismus h auf den Restklassenraum bildet dann das Intervall $[0, 2]$ eineindeutig ab, während $h([2, \infty))$ eine eindimensionale Torusgruppe darstellt. Auf dem direkten Produkt $C \times h(R)$ betrachten wir diejenige Kongruenzrelation γ, die alle Elemente $(c, h(r))$ und $(c', h(r'))$ identifiziert, wenn $h(r)=h(r')$ und $c'c^{-1} \in C(r)$ gilt. Die Restklassenhalbgruppe $(C \times h(R))/\gamma$ ist die kompakte topologische Halbgruppe K; sie hat folgende Eigenschaften: In allen Punkten von $\gamma(C \times h([0, 1)))$ ist die Dimension unendlich und dieser Teilraum ist nicht homogen. Auf $\gamma(C \times h([1, 2)))$ ist die Dimension endlich, z. B. ist auf $\gamma(C \times h([3/2 + i/2n, 3/2 + (i+1)/2n)))$, $i=0, \ldots, n-1$, die Dimension gleich $n-i$. Die Untergruppe $D = \underline{D} = \gamma(C \times h([2, \infty)))$ ist isomorph einer eindimensionalen Torusgruppe.

Literatur

[1] BOURBAKI, N.: Topologie générale. Eléments de Math., Actual. sci. ind. **858** (1940) = **1142** (1952).

[2] CLIFFORD, A. H.: Connected ordered topological semigroups with idempotent endpoints. Trans. Amer. Math. Soc. **88**, 80—98 (1958).

[3] DLAB, V.: Eine Bemerkung zur Theorie dividierbarer abelscher Gruppen. Czechosl. math. J. **8** (83), Nr. 7, 54—60 (1957).

[4] COHEN, H., and L. I. WADE: Clans with zero on an interval. Trans. Amer. Math. Soc. **88**, 523—533 (1958).

[5] ELLIS, R.: A note on the continuity of the inverse. Proc. Amer. Math. Soc. 8, 372—373 (1957).

[6] FAUCETT, W. C.: Compact semigroups irreducibly connected between two idempotents. Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 741—747 (1958).

[7] FUCHS, L.: Abelian groups. Hung. Acad. of Sciences, Budapest 1958.

[8] GANEA, T.: Zur Charakterisierung einparametriger topologischer Gruppen. Com. Acad. R. P. Române **1**, 731—732 (1951).

[9] GLEASON, A. M.: Groups without small subgroups. Ann. of Math. **56**, 193—212 (1952).

[10] GLUSKOV, V. M.: Lie Algebren lokal bikompakter Gruppen. Uspehi Mat. Nauk (N. S.) **12**, No. 2 (**77**), 137—142 (1957).

[11] HEWITT, E.: Compact monothetic semigroups. Duke Math. J. **23**, 447—457 (1956).

[12] HILLE, E., and R. S. PHILLIPS: Functional Analysis and semigroups. Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. XXXI, 1957 (2. Aufl.).

[13] HOFMANN, K. H.: Topologische Loops mit schwachen Assoziativitätsforderungen. Math. Z. **70**, 125—155 (1958).

[14] HOFMANN, K. H.: Topologische Doppelloops. Math. Z. **70**, 213—230 (1958).

[15] HOFMANN, K. H.: Topologische Doppelloops und topologische Halbgruppen. Math. Ann. **138**, 239—258 (1959).

[16] KOCH, R. J.: On monothetic semigroups. Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 397—401 (1957).

[17] KOCH, R. J.: Arcs in partially ordered spaces. Pac. J. Math. **9**, 723—728 (1959).

[18] MALCEV, A. I.: Analytische Loops. Mat. Sbornik, N. S. **36**(**77**), 3—20 (1954).

[19] MONTGOMERY, D., and L. ZIPPIN: Topological transformation groups. Intersc. Tracts in Pure and Applied Math. **1** (1956).

[20] MOSTERT, P. S., and A. L. SHIELDS: On the structure of semigroups on a compact manifold with boundary. Ann. of Math. **5**, 117—143 (1957).

[21] Mostert, P. S., and A. L. Shields: Semigroups with identity on a manifold. Trans. Amer. Math. Soc. **91**, 380—389 (1959).

[22] Obreanu, F.: Topologies compatibles avec le groupe additif de la droite réelle. Com. Acad. R. P. Române **1**, 557—558 (1951).

[23] Wallace, A. D.: The structure of topological semigroups. Bull. Amer. Math. Soc. **61**, 95—112 (1955).

[24] Wallace, A. D.: One dimensional homogenous clans are groups. Proc. Nederl. Acad. Wet., Ser. A **58**, 576—580 (1958).

[25] Weil, A.: L'intégration dans les groupes topologiques. Actual. sci. ind. **869** (1940) = **1145** (1951).

[26] Wright, F. B.: Semigroups in compact groups. Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 309—311 (1956).

[27] Wright, F. B.: A note on one-parameter and monothetic groups. J. Math. Soc. Japan **9**, 228—233 (1957).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 8. März 1960)

Wittich, H.
Math. Zeitschr. 74, 278–288 (1960)

Eindeutige Lösungen der Differentialgleichung $w' = R(z, w)$

Herrn Erich Kamke zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von
Hans Wittich

Unter den Differentialgleichungen

$$w' = R(z, w), \qquad R(z, w) \text{ rational in } z \text{ und } w, \tag{1}$$

nimmt die Riccatische Differentialgleichung

$$w' = a(z) + b(z)\, w + c(z)\, w^2, \tag{2}$$

$a(z)$, $b(z)$ und $c(z)$ rationale Funktionen, eine besondere Stellung ein. So ist jede Differentialgleichung (1), deren Lösungen frei von beweglichen algebraischen Verzweigungen sind, eine Riccatische Differentialgleichung. Eindeutigkeit der Lösungen wird durch diese Forderung nicht garantiert, da die festen kritischen Stellen Verzweigungen sein können. Die Forderung, daß eindeutige Lösungen von (1) existieren sollen, führt ebenfalls auf die Riccatische Differentialgleichung. 1913 bewies J. Malmquist[1]) den Satz: Hat die Differentialgleichung $w' = R(z, w)$ eine nichtrationale und im Großen eindeutige Lösung, dann ist $R(z, w) = a(z) + b(z)\, w + c(z)\, w^2$. Man erkennt, wie einschneidend die Forderung „Eindeutigkeit im Großen" ist. Kommt diese Eigenschaft auch nur einer nichtrationalen Lösung von (1) zu, dann muß (1) eine Riccatische Differentialgleichung sein. Das Resultat von Malmquist läßt sich verschärft in der folgenden Form beweisen[2]): $w' = R(z, w)$ besitze in $0 < |z - \zeta| < \varrho$ eine eindeutige analytische Lösung, für die $z = \zeta$ wesentliche Singularität ist. Dann ist $R(z, w)$ von der Form $R(z, w) = a(z) + b(z)\, w + c(z)\, w^2$.

Solche in der Umgebung einer Stelle ζ eindeutige Lösungen von (1) sollen im folgenden untersucht werden. Dabei darf $\zeta = \infty$ angenommen werden.

1. Die Funktion $w = w(z)$ sei in $R \leqq |z| < \infty$ eindeutig analytisch. Die Zahl der auf dem Kreisring $R \leqq |z| \leqq r$ gelegenen Wurzeln der Gleichung $w(z) - c = 0$ bzw. $\frac{1}{w(z)} = 0$ sei $n(r, c)$ bzw. $n(r, \infty)$. Dabei wird jede Wurzel entsprechend

[1]) Malmquist, J.: Sur les fonctions à un nombre fini de branches définies par les équations différentielles du premier ordre. Acta math. **36** (1913).

[2]) Wittich, H.: Zur Theorie der Riccatischen Differentialgleichung. Math. Ann. **127** (1954).

ihrer Vielfachheit gezählt. Damit werden die Anzahlfunktionen

$$N(r, c) = N\left(r, \frac{1}{w - c}\right) = \int_R^r \frac{n(t, c)}{t}\, dt \quad \text{und} \quad N(r, \infty) = N(r, w) = \int_R^r \frac{n(t, \infty)}{t}\, dt$$

gebildet. Die Schmiegungsfunktionen $m(r, \infty) = m(r, w)$ bzw. $m(r, c) = m\left(r, \frac{1}{w - c}\right)$ werden erklärt durch

$$m(r, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |w|\, d\varphi \quad \text{bzw.} \quad m\left(r, \frac{1}{w - c}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left|\frac{1}{w - c}\right| d\varphi,$$

wobei über den Kreis $|z| = r > R$ integriert wird. Die Summe

$$T(r, w) = N(r, w) + m(r, w)$$

heißt die charakteristische Funktion oder Charakteristik[3]). Der erste Hauptsatz besagt, daß für beliebige c

$$T(r, w) = N(r, c) + m(r, c) + O(\log r)$$

gilt. Die Forderung, daß $z = \infty$ wesentliche Singularität für $w(z)$ sein soll, bedingt

$$\lim_{r \to \infty} \frac{T(r, w)}{\log r} = \infty. \tag{3}$$

Die Zahl

$$\lambda = \lambda(w, \infty) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log T(r, w)}{\log r}$$

heißt die Ordnung der Funktion $w(z)$ für die Stelle $z = \infty$.

Ist $w(z)$ von endlicher Ordnung, dann gilt für die Schmiegungsfunktion $m\left(r, \frac{w'}{w}\right)$ der logarithmischen Ableitung $\frac{w'}{w}$

$$m\left(r, \frac{w'}{w}\right) = O(\log r), \tag{4}$$

eine Beziehung, die bei der Untersuchung der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Vorteil angewandt werden kann.

Wir nehmen jetzt an, daß $w(z)$ in $R \leqq |z| < \infty$ eindeutig analytisch ist, die Differentialgleichung (1) löst und der Bedingung (3) genügt. Beim Beweis des verallgemeinerten Malmquistschen Satzes wurden die Beziehungen

$$m(r, w) = O(\log r) \quad \text{und} \quad T(r, w) = O(r^\alpha), \qquad \alpha < \infty,$$

bewiesen. Danach ist die Ordnung von $w(z)$ endlich. Diese Aussage kann auch mit Hilfe der geometrischen Deutung der Charakteristik bewiesen werden,

[3]) a) Nevanlinna, R.: Eindeutige analytische Funktionen. Berlin 1953. — b) Wittich, H.: Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. Berlin 1955.

wenn man beachtet, daß $w(z)$ eine Riccatische Differentialgleichung löst. Die Funktion $w(z)$ hat unendlich viele Polstellen. Im anderen Falle wäre nämlich $N(r, w) \leqq C_1 \log r$. In Verbindung mit $m(r, w) \leqq C_2 \log r$ würde $T(r, w) \leqq C \log r$ folgen, was der Beziehung (3) widerspräche.

Zur Bestimmung der Ordnung λ ist es zweckmäßig, durch eine Transformation, die die Ordnung nicht ändert, die Differentialgleichung (2) auf eine bequemere Form zu bringen. Dazu setzen wir $w = \alpha(z) + \beta(z)\, y$ und wählen $\alpha(z)$, $\beta(z)$ so, daß $w' = a(z) + b(z)\, w + c(z)\, w^2$ in die einfachere Differentialgleichung $y' = Q(z) + y^2$ übergeht. Offenbar ist $T(r, w) = T(r, y) + O(\log r)$, also $\lambda(w) = \lambda(y)$. Zwischen den Koeffizienten $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ und der rationalen Funktion $Q(z)$ besteht der Zusammenhang

$$Q(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{c''}{c} - \frac{3}{2}\left(\frac{c'}{c}\right)^2\right) + a\,c - \frac{b^2}{4} - \frac{1}{2}\,b\,\frac{c'}{c} + \frac{b'}{2}. \tag{5}$$

Von dieser einfacheren Differentialgleichung gehen wir aus und schreiben, indem wir wieder y durch w ersetzen

$$w' = Q(z) + w^2. \tag{2'}$$

Für hinreichend großes R ist $Q(z)$ in $R \leqq |z| < \infty$ frei von Null- und Polstellen und hat eine Entwicklung der Form

$$Q(z) = a\, z^{\nu} + a_1\, z^{\nu-1} + \cdots, \qquad a \neq 0.$$

Aus (2') folgt, wenn für eine Polstelle p $w = \frac{A}{(z-p)^{\mu}} + \cdots$ gesetzt wird, daß jede der unendlich vielen Polstellen einfach ist. Das Residuum jedes Poles ist -1.

Mit $\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} w(z)\, dz$ bilden wir die in $R \leqq |z| < \infty$ holomorphe Funktion $F(z) = e^{-\Phi(z)}$. $F(z)$ hat unendlich viele einfache Nullstellen, die genau dort liegen, wo $w(z)$ Polstellen hat. Aus $w(z) = -\frac{F'(z)}{F(z)}$ folgt

$$w' = -\frac{F''}{F} + w^2,$$

also zusammen mit (2')

$$F'' + Q(z)\, F(z) = 0. \tag{6}$$

Nach den Annahmen über $w(z)$ hat (6) eine in $R \leqq |z| < \infty$ holomorphe Lösung. Wegen $N(r, w) = N\left(r, \frac{1}{F}\right)$ und $m(r, w) = O(\log r)$ ist

$$T(r, w) = N\left(r, \frac{1}{F}\right) + O(\log r),$$

also

$$\lambda(w, \infty) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log N(r, 1/F)}{\log r}.$$

Zur Berechnung von λ genügt also die Bestimmung der Anzahlfunktion $N\left(r, \frac{1}{F}\right)$.

2. Auf die in $R \leqq |z| < \infty$ holomorphe Funktion $F(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j$ läßt sich die Theorie des Maximalgliedes von WIMAN-VALIRON[4]) anwenden und führt zunächst zu einer notwendigen Bedingung für ν. Ist $n(r)$ der Zentralindex von $F(z)$, dann gilt für $z = \zeta$, wobei ζ $|F(\zeta)| = \max_{|z|=r} |F(z)|$ genügt,

$$F'(\zeta) = \frac{n(r)}{\zeta} F(\zeta)\left(1 + \varepsilon_1(\zeta)\right), \qquad F''(\zeta) = \left(\frac{n(r)}{\zeta}\right)^2 F(\zeta)\left(1 + \varepsilon_2(\zeta)\right),$$

sofern $r = |\zeta|$ nicht einer Ausnahmemenge Δ von endlichem logarithmischem Maß angehört. Die Größen $\varepsilon_j(\zeta)$ streben gegen Null, wenn $|\zeta|$ über zulässige Werte gegen ∞ strebt. Mit $Q(z) = a z^\nu \left(1 + \varepsilon_3(z)\right)$ erhalten wir aus (6)

$$(7) \quad \left(\frac{n(r)}{\zeta}\right)^2 \left(1 + \varepsilon_2(\zeta)\right) + a\zeta^\nu \left(1 + \varepsilon_3(\zeta)\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{n(r)}{\zeta}\right)^2 = -a\zeta^\nu \left(1 + \varepsilon(\zeta)\right).$$

Aus der letzten Beziehung folgt, da $z = \infty$ wesentliche Singularität für $F(z)$ ist und daher der Zentralindex $n(r)$ für $r \to \infty$ unbeschränkt wächst, die notwendige Bedingung

$$\nu \geqq -1.$$

Weiter folgt nach G. VALIRON $n(r) \sim c r^{1+\frac{\nu}{2}}$ und daraus für den Maximalbetrag $M(r, F)$ von $F(z)$

$$\log M(r, F) \sim C r^{1+\frac{\nu}{2}}, \qquad 0 < C < \infty.$$

$F(z)$ ist also von der Wachstumsordnung

$$\lambda(F) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \log M(r, F)}{\log r} = 1 + \frac{\nu}{2} \geqq \frac{1}{2}.$$

Daraus kann bekanntlich nicht ohne weiteres geschlossen werden, daß auch die Ordnung von $w(z)$ gleich $1 + \frac{\nu}{2}$ ist. Wir werden nachher auf anderem Wege zeigen, daß tatsächlich $\lambda(w) = 1 + \frac{\nu}{2}$ gilt.

Aus (7) läßt sich eine Aussage über die Lage der Stellen ζ, an denen der Maximalbetrag angenommen wird, ablesen. Durch eine Ähnlichkeitstransformation der z-Ebene läßt sich erreichen, daß

$$Q(z) = -\left(\frac{\nu + 2}{2}\right)^2 z^\nu + \cdots$$

gilt. Eine solche Transformation beeinflußt die Wachstumsordnung $\lambda(F)$ nicht. Für r-Werte, die nicht zu Δ gehören, folgt aus (7)

$$n^2(r) = \left(\frac{\nu + 2}{2}\right)^2 \zeta^{\nu+2}\left(1 + \varepsilon(\zeta)\right), \quad \text{also} \quad \arg \zeta = \frac{2\pi}{\nu + 2} j + \varepsilon(\zeta),$$
$$j = 0, 1, \ldots, \nu + 1.$$

[4]) Man vgl. dazu 3 b).

A. WIMAN hat die Vermutung ausgesprochen, daß die Nullstellen von $F(z)$ sich jenen Halbstrahlen anschließen, die die von den Strahlen $\arg z = \frac{2\pi}{\nu+2} j$ und $\arg z = \frac{2\pi}{\nu+2}(j+1)$ gebildeten Winkelräume halbieren, also den Halbstrahlen

$$\arg z = \frac{\pi}{\nu+2}(2j+1), \qquad j = 0, 1, \ldots, \nu+1.$$

Diese Vermutung läßt sich bestätigen. Dabei gelingt auch die Bestimmung der gesuchten Anzahlfunktion $N\left(r, \frac{1}{F}\right)$ und damit der Beweis der Behauptung $\lambda(w) = 1 + \frac{\nu}{2}$.

3. Durch die Transformation

$$y = Q^{\frac{1}{4}} \cdot F, \qquad x = \int_{z_0}^{z} \sqrt{Q(z)}\, dz$$

geht die Differentialgleichung $F'' + Q(z)F = 0$, $Q(z) = -\left(\frac{\nu-2}{2}\right)^2 z^\nu + \cdots$, über in die Differentialgleichung

$$y'' + \big(1 + h(x)\big)\, y = 0, \qquad h(x) = \frac{5Q'^2 - 4QQ''}{16Q^3}.$$

Diese Differentialgleichung wurde von E. HILLE[5]) auf dem Wege über eine assoziierte Integralgleichung eingehend untersucht. Seine Methode führt, wenn die Transformation rückgängig gemacht wird, zu dem folgenden Resultat: Die Differentialgleichung $F'' + Q(z)F = 0$ hat $\nu+2$ Lösungen $F_0(z)$, $F_1(z)$, ..., $F_{\nu+1}(z)$, wobei $F_j(z)$, $j = 0, 1, \ldots, \nu+1$, im Winkelraum

$$\left|\arg z - \frac{2\pi}{\nu+2} j\right| < \frac{3\pi}{\nu+2} - \varepsilon$$

die asymptotische Entwicklung

$$\log F_j(z) \sim (-1)^{j+1} z^{1+\frac{\nu}{2}}$$

besitzt. Je zwei Lösungen $F_j(z)$, $F_{j+1}(z)$ sind linear unabhängig. Jede Lösung, die von F_{j+1} und F_j linear abhängig ist, hat im Winkelraum

$$\left|\arg z - \frac{\pi}{\nu+2}(2j+1)\right| < \varepsilon$$

unendlich viele Nullstellen. Für ihre Anzahl $n_j(r)$ gilt $n_j(r) \sim \frac{1}{\pi} r^{1+\frac{\nu}{2}}$.

Es sei nun $w(z)$ eine eindeutige, (3) genügende Lösung der Differentialgleichung $w' = Q(z) + w^2$ und z_0 eine Regularitätsstelle mit hinreichend großem Betrag. Wir wählen $F(z_0)$ und $F'(z_0)$ so, daß $w(z_0) = -\frac{F'(z_0)}{F(z_0)}$ gilt. Durch

[5]) Man vergleiche die Darstellung bei R. NEVANLINNA: Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten. Acta math. **58** (1932).

die Anfangsbedingungen $F(z_0)$, $F'(z_0)$ ist die eindeutige Lösung $F(z)$ von (6) festgelegt. W_j bezeichne den Winkelraum $\frac{2\pi}{\nu+2} j - \delta \leq \arg z \leqq \frac{2\pi}{\nu+2}(j+1) + \delta$, $0 < \delta < \frac{\pi}{\nu+2}$. In W_j gelten für $|z| \geq R_0$ mit hinreichend großem R_0 die asymptotischen Entwicklungen für $F_j(z)$ und $F_{j+1}(z)$. Da $F_j(z)$ und $F_{j+1}(z)$ in W_j linear unabhängig sind, gilt dort

$$F(z) = c_j F_j(z) + c_{j+1} F_{j+1}(z).$$

$F(z)$ hat danach in $W_j(R_0) = W_j \cap |z| \geqq R_0$ endlich viele Nullstellen oder unendlich viele. Hat $F(z)$ in $W_j(R_0)$ unendlich viele Nullstellen, dann liegen diese fast alle im Winkelraum

$$W_j(\varepsilon): \quad \left|\arg z - \frac{\pi}{\nu+2}(2j+1)\right| < \varepsilon.$$

Mit $n_j(r, 0)$ werden die im Durchschnitt von $W_j(\varepsilon)$ und $R \leqq |z| \leqq r$ gelegenen Nullstellen von $F(z)$ bezeichnet. Dann gilt

$$n_j(r, 0) = \frac{r^\alpha}{\pi}\left(1 + \varepsilon_j(r)\right), \qquad \alpha = \frac{\nu+2}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{r\to\infty} \varepsilon_j(r) = 0.$$

Durch Addition erhalten wir die Zahl $n(r, 0)$ der auf $R \leqq |z| \leqq r$ gelegenen Nullstellen von $F(z)$:

$$n(r, 0) = A\, r^\alpha\left(1 + \varepsilon(r)\right), \qquad \lim_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0. \tag{8}$$

Da $F(z)$ unendlich viele Nullstellen hat, ist $A \neq 0$. A ist ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{\pi}$: $A = m\frac{1}{\pi}$ mit $1 \leqq m \leqq \nu+2$.

Da $n(r, 0)$ mit wachsendem r nicht abnimmt, erhalten wir aus der Definition von $N\left(r, \frac{1}{F}\right)$

$$n\left(\frac{r}{2}, 0\right)\log 2 \leqq N\left(r, \frac{1}{F}\right) \leqq n(r, 0)\log\frac{r}{R}$$

und

$$\log n\left(\frac{r}{2}, 0\right) + \log\log 2 \leqq \log N\left(r, \frac{1}{F}\right) \leqq \log n(r, 0) + \log\log\frac{r}{R}.$$

Daraus ergibt sich in Verbindung mit (8)

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log N(r, 1/F)}{\log r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\log N(r, w)}{\log r} = 1 + \frac{\nu}{2},$$

also die Behauptung. Damit können wir den folgenden Satz aussprechen:

Satz. *Eine in $R \leqq |z| < \infty$ eindeutige und der Bedingung $\lim_{r\to\infty} \frac{T(r, w)}{\log r} = \infty$ genügende Lösung der Differentialgleichung*

$$w' = Q(z) + w^2, \qquad Q(z) = a z^\nu + \cdots,$$

ist von regulärem Wachstum und hat die Ordnung $\lambda(w,\infty)=1+\frac{\nu}{2}$. *Für* $\nu<-1$ *existiert keine eindeutige Lösung der Differentialgleichung mit der Eigenschaft* $\varlimsup_{r\to\infty}\frac{T(r,w)}{\log r}=\infty$.

Ist $w(z)$ in $0<|z-\zeta|\leqq R'$, $\zeta\neq\infty$, eindeutig analytisch und transzendent, dann gehen wir durch $t=\frac{1}{z-\zeta}$ zu dem bereits behandelten Fall über. Gilt an der Stelle $z=\zeta$ $Q(z)=a(z-\zeta)^{\mu}+a_1(z-\zeta)^{\mu+1}+\cdots$, dann ist $y(t)=w\left(\zeta+\frac{1}{t}\right)$ eine in $\frac{1}{R'}=R\leqq|t|<\infty$ eindeutige Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dt}=(-a\,t^{-\mu-2}-a_1\,t^{-\mu-3}-\ldots)-t^{-2}\,y^2.$$

Wird diese Differentialgleichung auf die Normalform $\frac{dv}{dt}=Q_0(t)+v^2$ gebracht, dann ist nach (5)

$$Q_0(t)=a\,t^{-\mu-4}+a_1\,t^{-\mu-5}+\cdots$$

Wegen $\nu\geqq-1$ erhalten wir die notwendige Bedingung $\mu\leqq-3$. Danach ist $\nu=-\mu-4$, woraus sich für die Ordnung $\lambda(w,\zeta)$, bezogen auf die singuläre Stelle ζ,

$$\lambda(w,\zeta)=1+\frac{\nu}{2}=-\frac{\mu}{2}-1\geqq\frac{1}{2}$$

ergibt. Danach gilt der

SATZ. *Jede in der Umgebung von* $z=\zeta$ *eindeutige Lösung von* $w'=R(z,w)$, *deren Ordnung* $\lambda(w,\zeta)$ *kleiner als* $\frac{1}{2}$ *ist, verhält sich rational in* $z=\zeta$. *Ist* $z=\zeta$ *transzendente Singularität für* $w(z)$, *dann gilt* $\lambda(w,\zeta)\geqq\frac{1}{2}$.

Die Schranke $\frac{1}{2}$ ist genau, wie die Differentialgleichung $w'=\frac{1}{2z}-\frac{1}{2z}w+\frac{1}{2}w^2$ mit der eindeutigen Lösung $w=\operatorname{tg}\sqrt{z}$ zeigt. Die Entwicklung für $Q(z)$ lautet $Q(z)=\frac{1}{4z}+\frac{3}{16z^2}$.

4. Aus der Annahme, daß $w'=R(z,w)$ drei in U: $0<|z-\zeta|<R'$ eindeutige Lösungen $w_1(z)$, $w_2(z)$, $w_3(z)$ hat, die sich in $z=\zeta$ rational verhalten, folgt: Jede andere in U eindeutige Lösung $w(z)$ ist rational in $z=\zeta$. Aus der Annahme, daß $w(z)$ nicht rational in ζ ist, folgt, daß $w'=R(z,w)$ eine Riccatische Differentialgleichung ist. Da sich jedes Integral der Riccatischen Differentialgleichung rational durch drei partikuläre Integrale ausdrücken läßt, ergibt sich aus $w(z)=r(w_1,w_2,w_3)$, daß $w(z)$ rational in $z=\zeta$ ist, entgegen der Annahme.

Es sei nun $w(z)$ in U: $R\leqq|z|<\infty$ eindeutig und transzendent. Weiter sei $\varrho(z)$ eindeutig in U und rational in $z=\infty$. Wir betrachten die Differenz $w(z)-\varrho(z)$ und beweisen den folgenden

SATZ. $w=w(z)$ *sei eine in* U *eindeutige und transzendente Lösung von* $w'=R(z,w)$. *Ist* $\varrho(z)$ *eindeutig in* U *und rational in* $z=\infty$, *dann hat die Funktion* $w(z)-\varrho(z)$ *genau dann den Picardschen Ausnahmewert Null, wenn* $\varrho(z)$ *selber Lösung von* $w'=R(z,w)$ *ist.*

Ist $\varrho(z)$ nicht Lösung der Differentialgleichung, dann gilt

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N(r, 1/(w(z)-\varrho(z)))}{N(r, w)} = 1.$$

Beweis. Nach dem Satz von Malmquist ist $w' = R(z, w)$ eine Riccatische Differentialgleichung $w' = a + bw + cw^2$.

a) Es sei $\varrho'(z) = a + b\varrho + c\varrho^2$. Für $v(z) = w(z) - \varrho(z)$ erhalten wir die Differentialgleichung

$$v' = (a + b\varrho + c\varrho^2 - \varrho') + v(b + 2\varrho c + cv), \quad \text{also} \quad v' = v(b + 2\varrho c + cv).$$

Wäre Null nicht Picardscher Ausnahmewert für $v(z)$, dann würde an mindestens einer Regularitätsstelle in U $v(z_0) = 0$ gelten, also nach dem Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen $v(z) \equiv 0$, was nicht möglich ist.

b) Es sei $v(z) \neq 0$ für U^*: $R \leqq R^* \leqq |z| < \infty$. Dann ist $y(z) = \frac{1}{v(z)}$ holomorph in U^*. Aus $v' = Q(z) + (b + 2\varrho c)v + cv^2$, $Q(z) = a + b\varrho + c\varrho^2 - \varrho'$, folgt für y

$$y' = -c - (b + 2c\varrho)\, y - Q(z)\, y^2.$$

$y(z)$ ist eindeutige Lösung einer Riccatischen Differentialgleichung, wenn $Q(z) \not\equiv 0$ ist. Als solche muß $y(z)$ unendlich viele Pole haben, während doch $y(z)$ holomorph in U^* ist. Es ist also $Q(z) \equiv 0$, d.h. $\varrho(z)$ ist Lösung der Differentialgleichung $w' = a + bw + cw^2$.

Ist $Q(z) \not\equiv 0$, dann folgt aus der Differentialgleichung für v

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{Q(z)} \cdot \left(\frac{v'}{v} - b - 2\varrho c - cv \right).$$

Übergang zum Pluslogarithmus und Integration über $|z| = r$ ergibt

$$m\left(r, \frac{1}{v}\right) \leqq m\left(r, \frac{1}{Q}\right) + m\left(r, \frac{v'}{v}\right) + m(r, b) + m(r, \varrho) + 2m(r, c) + m(r, v) + C.$$

Da v von endlicher Ordnung ist, gilt nach (4) $m\left(r, \frac{v'}{v}\right) = O(\log r)$. Weiter ist $m(r, v) = O(\log r)$. Da sich alle anderen vorkommenden Funktionen rational in $z = \infty$ verhalten, sind ihre Schmiegungsfunktionen ebenfalls von der Form $O(\log r)$. Es gilt also $m\left(r, \frac{1}{v}\right) = O(\log r)$, d.h.

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N(r, 1/(w(z)-\varrho(z)))}{N(r, w)} = 1.$$

Sind $\varrho_1(z)$ und $\varrho_2(z)$ von rationalem Verhalten in $z = \infty$ und lösen beide die Differentialgleichung $w' = a + bw + cw^2$, dann ist $y(z) = \frac{w - \varrho_1}{w - \varrho_2} \neq 0, \infty$ in einer Umgebung von $z = \infty$. Aus $w = \frac{\varrho_2 y - \varrho_1}{y - 1}$ und $w' = a + bw + cw^2$ folgt durch elementare Rechnung

$$y' = c(z)\left(\varrho_1(z) - \varrho_2(z)\right) y.$$

Mit $\varrho(z) \equiv \alpha$ erhalten wir Aussagen über die α-Stellen von $w(z)$. Ein Wert α ist genau dann Picardscher Ausnahmewert von $w(z)$, wenn $w(z) \equiv \alpha$ Lösung der Differentialgleichung ist, d.h. wenn

$$D(z, \alpha) = a(z) + b(z)\,\alpha + c(z)\,\alpha^2 \equiv 0$$

gilt. Ist für $j = 1, 2$ $D(z, \alpha_j) \not\equiv 0$, dann folgt aus $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{N(r, \alpha_j)}{N(r, w)} = 1$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N(r, \alpha_1)}{N(r, \alpha_2)} = 1.$$

Die Aussage des Picardschen Satzes ergibt sich hier aus der Tatsache, daß für höchstens zwei Werte α $D(z, \alpha) \equiv 0$ gelten kann. Hat $w' = R(z, w)$ eine Lösung mit zwei Picardschen Ausnahmewerten, dann ist die Differentialgleichung von der Form

$$w' = c(z)\,(w - \alpha_1)\,(w - \alpha_2).$$

Mit $c(z) = B z^m + B_1 z^{m-1} + \cdots$ erhalten wir

$$Q(z) = -\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{4} B^2 z^{2m} + \cdots,$$

wobei $m \geqq 0$ sein muß. Es ist also $\nu = 2m$ und $\lambda(w, \infty) = 1 + \frac{\nu}{2} = 1 + m \geqq 1$. Diese Differentialgleichung läßt sich elementar lösen. Dabei dürfen wir $\alpha_1 = i$, $\alpha_2 = -i$ annehmen, also

$$w' = c(z)\,(1 + w^2).$$

Mit $\frac{dC(z)}{dz} = c(z)$ erhalten wir $w = \operatorname{tg} C(z)$. Die im Endlichen gelegenen Pole von $c(z)$ sind im Kreis $|z| < R$ enthalten. Die Lösung $w(z) = \operatorname{tg} C(z)$ ist, gegebenenfalls nach Fixierung eines Zweiges des Logarithmus, in $R \leqq |z| < \infty$ eindeutig, wenn die Residuensumme der in $|z| < R$ gelegenen Polstellen Null ist. Für $w' = \frac{z^{2n} - z^n - 2}{z^2 - 1}(1 + w^2)$ erhalten wir $w(z) = \operatorname{tg}\left(\frac{z^{n+1}}{n+1} + \log\frac{z+1}{z-1} + \gamma\right)$. Es gilt $\lambda(w, \infty) = 2n - 1$.

5. P. PAINLEVÉ hat sich in mehreren Arbeiten mit der Frage beschäftigt, ob gewisse der nach im benannten Transzendenten einer algebraischen Differentialgleichung $P(z, w, w') = 0$ genügen können. Die Painlevéschen Transzendenten sind nichtrationale Lösungen der Differentialgleichungen

$$w'' = 6w^2 + z \quad \text{und} \quad w'' = 2w^3 + z\,w + C, \quad C \text{ eine Konstante.}$$

Jede Lösung der ersten Painlevéschen Differentialgleichung $w'' = 6w^2 + z$ ist eindeutig analytisch in $|z| < \infty$ und hat unendlich viele Doppelpole. Die nichtrationalen Lösungen der zweiten Painlevéschen Differentialgleichung $w'' = 2w^3 + zw + C$ sind ebenfalls eindeutig analytisch in $|z| < \infty$ und haben unendlich viele Pole erster Ordnung mit dem Residuum 1 oder -1. Wir betrachten hier nur die Frage, ob partikuläre Lösungen der Painlevéschen

Differentialgleichungen gleichzeitig Lösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung der Form $w' = R(z, w)$ sein können.

Da alle transzendenten Lösungen der beiden Painlevéschen Differentialgleichungen der Bedingung (3) genügen, können partikuläre Lösungen dieser Differentialgleichungen höchstens einer Riccatischen Differentialgleichung genügen. Nun sind fast alle Polstellen von $w' = a(z) + b(z)w + c(z)w^2$ einfach. Mithin kann keine partikuläre Lösung von $w'' = 6w^2 + z$ gleichzeitig Lösung einer Riccatischen Differentialgleichung sein.

Wir betrachten nun die zweite Painlevéschen Differentialgleichung und nehmen an, daß eine partikuläre Lösung $F(z)$ gleichzeitig Lösung einer passenden Riccatischen Differentialgleichung ist. Aus $F'(z) = a(z) + b(z)F(z) + c(z)F^2$ folgt durch Differentiation nach z und Einsetzen von $F'(z)$

$$\begin{aligned} F'' &= 2c^2F^3 + (c' + 3bc)F^2 + (b' + b^2 + 2ac)F + (a' + ab) \\ &= 2c^2F^3 + \alpha(z)F^2 + \beta(z)F + \gamma(z). \end{aligned}$$

In Verbindung mit $F'' = 2F^3 + zF + C$ ergibt sich die Identität

$$2\left(c^2(z) - 1\right)F^3 + \alpha(z)F^2 + \left(\beta(z) - z\right)F + \left(\gamma(z) - C\right) \equiv 0.$$

Diese Identität muß für alle z gelten, also auch für die unendlich vielen Polstellen $p_1, p_2, \ldots$. Daraus folgt

$$c^2(z) \equiv 1, \qquad \alpha(z) \equiv 0, \qquad \beta(z) = z \quad \text{und} \quad \gamma(z) \equiv C.$$

Mit $c(z) \equiv 1$ erhalten wir $b(z) \equiv 0$, $a(z) = \frac{z}{2}$ und mit $c(z) \equiv -1$ $b(z) \equiv 0$, $a(z) = -\frac{z}{2}$. Hat also $w'' = 2w^3 + zw + C$ eine partikuläre Lösung, die einer Riccatischen Differentialgleichung genügt, dann ist diese von der Form

$$w' = \frac{z}{2} + w^2 \quad \text{bzw.} \quad w' = -\frac{z}{2} - w^2.$$

Durch Differentiation nach z ist zu erkennen, daß dann die Painlevésche Differentialgleichung von der Form

$$w'' = 2w^3 + zw + \tfrac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad w'' = 2w^3 + zw - \tfrac{1}{2}$$

sein muß. Es genügt, weil bei Ersetzung von w durch $-w$ die erste Differentialgleichung in die zweite übergeht, $w'' = 2w^3 + zw + \frac{1}{2}$ zu betrachten.

Jede Lösung $F(z)$ von $w' = \frac{z}{2} + w^2$ ist eindeutig analytisch in $|z| < \infty$ und transzendent. Sie genügt einer Painlevéschen Differentialgleichung der Form $w'' = 2w^3 + zw + \frac{1}{2}$, und zwar ist $F(z)$ jene partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung, die den Anfangsbedingungen $F(z_0) = w_0$, $F'(z_0) = \frac{z_0}{2} + w_0^2$ genügt. Ist umgekehrt $\Phi(z)$ die durch $\Phi(z_0) = w_0$, $\Phi'(z_0) = \frac{z_0}{2} + w_0^2$ festgelegte Lösung

von $w'' = 2w^3 + zw + \frac{1}{2}$, dann löst $\Phi(z)$ auch $w' = \frac{z}{2} + w^2$. Wir betrachten die durch $F(z_0) = w_0$ bestimmte Lösung von $w' = \frac{z}{2} + w^2$. Dann ist zunächst $F'(z_0) = \frac{z_0}{2} + w_0^2 = \Phi'(z_0)$. Durch fortgesetzte Differentiation findet man $F^{(j)}(z_0) = \Phi^{(j)}(z_0)$ für alle j, also $F(z) \equiv \Phi(z)$. Der in dem Buch von W. W. GOLUBEW[6]) zitierte Satz von PAINLEVÉ, daß kein partikuläres Integral der betrachteten Gleichungen ein Integral einer Gleichung erster Ordnung der Gestalt $P(z, w, w')$ sein kann, ist also falsch, wie die angegebene Betrachtung zeigt.

Das gleiche Beispiel widerlegt die von P. BOUTROUX[7]) gemachte Bemerkung, daß alle transzendenten Lösungen von $w'' = 2w^3 + zw + C$ die Ordnung drei haben. Die partikulären Lösungen von $w'' = 2w^3 + zw + \frac{1}{2}$, die gleichzeitig $w' = \frac{z}{2} + w^2$ genügen, haben nämlich wegen $\nu = 1$ die Ordnung $\lambda = 1 + \frac{\nu}{2} = \frac{3}{2}$.

Karlsruhe, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 29. März 1960)

[6]) GOLUBEW, W. W.: Differentialgleichungen im Komplexen. Berlin 1958.

[7]) BOUTROUX, P.: Sur quelques proprietés des fonctions entières. Acta math. **28** (1904).

Nitsche, J. C. C.
Math. Zeitschr. 74, 289–292 (1960)

Ein Eindeutigkeitssatz für zweifach zusammenhängende Minimalflächen *

Herrn Erich Kamke zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von

Johannes C. C. Nitsche

Es sei S eine in Zylinderkoordinaten $x = r(z, \varphi) \cdot \cos \varphi$, $y = r(z, \varphi) \cdot \sin \varphi$ dargestellte zweifach zusammenhängende Minimalfläche. Die Abstandsfunktion $r(z, \varphi)$ ist dabei als positiv und periodisch vorausgesetzt: $r(z, \varphi + 2\pi) = r(z, \varphi)$, so daß insbesondere die Schnittkurven S_{z_0} der Fläche mit den Ebenen $z = z_0$ sternförmig bezüglich des Punktes $x = y = 0$ ausfallen.

Wir interessieren uns hier für die Bestimmung aller Minimalflächen dieser Art, welche sich beiderseits ins Unendliche erstrecken oder genauer, deren Funktion $r(z, \varphi)$ für alle Werte von z und φ erklärt und zweimal stetig differenzierbar ist. In einer früheren Arbeit [1] hatte ich bewiesen, daß nur ein Katenoid

$$(1) \qquad r(z, \varphi) = \frac{1}{a}\left[c \sin(\varphi + d) + \sqrt{\mathfrak{Cof}^2(az + b) - c^2 \cos^2(\varphi + d)}\right], \quad a > 0, \ |c| < 1$$

mit einer zur z-Achse parallelen Rotationsachse diese Bedingungen erfüllt, falls noch weiterhin vorausgesetzt wird, daß alle Kurven S_z konvex sind. Auf Grund eines Satzes von M. Shiffman [2], demzufolge mit S_{z_1} und S_{z_2} $(z_1 < z_2)$ immer auch alle Kurven S_z $(z_1 < z < z_2)$ konvex sind, würde es ausreichen anzunehmen, daß zwei Folgen S_{z_m}, S_{z_n} $(z_m \to \infty, z_n \to -\infty)$ konvexer Kurven auf S existieren.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, die Voraussetzung der Konvexität überhaupt zu beseitigen und den folgenden Satz zu beweisen:

Es sei S eine zweifach zusammenhängende Minimalfläche mit der Darstellung $x = r(z, \varphi) \cdot \cos \varphi$, $y = r(z, \varphi) \cdot \sin \varphi$. Die Funktion $r(z, \varphi)$ sei für alle Werte von z und φ erklärt, zweimal stetig differenzierbar, positiv und periodisch: $r(z, \varphi + 2\pi) = r(z, \varphi)$.

Dann muß S ein Katenoid mit einer zur z-Achse parallelen Achse sein.

Im Hinblick auf das Resultat von [1] beruht der Beweis offensichtlich auf dem folgenden Hilfssatz:

Es sei S eine zweifach zusammenhängende Minimalfläche mit der Darstellung $x = r(z, \varphi) \cdot \cos \varphi$, $y = r(z, \varphi) \cdot \sin \varphi$. Die Funktion $r(z, \varphi)$ sei für alle Werte

*) Diese Arbeit ist unter Contract Nonr-710(16) zwischen der Universität von Minnesota und dem Office of Naval Research vorbereitet worden.

von z und φ erklärt, zweimal stetig differenzierbar, positiv und periodisch: $r(z, \varphi+2\pi) = r(z, \varphi)$.

Dann müssen alle Kurven S_z konvex sein.

Wie in [*1*] führen wir die neuen Parameter

$$(2) \qquad \begin{cases} \xi = \xi(z, \varphi) = z \\ \eta = \eta(z, \varphi) = \int\limits_{(0,0)}^{(z,\varphi)} \frac{1}{W} \left[r_z r_\varphi \, dz + (r^2 + r_\varphi^2) \, d\varphi \right] \end{cases}$$

ein. Das Integral in (2_2) ist dabei wegunabhängig, und W steht als Abkürzung für die Quadratwurzel $\sqrt{r^2 + r^2 r_z^2 + r_\varphi^2}$. ξ und η sind isotherme Parameter, wie man aus

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{W^2}{r^2 + r_\varphi^2} (d\xi^2 + d\eta^2)$$

ersieht. η ist monoton in φ, und man kann es (wie in [*1*], S. 861) so einrichten, daß der Zuwachs gerade 2π beträgt: $\eta(z, \varphi+2\pi) = \eta(z, \varphi) + 2\pi$. Durch die Formeln (2) wird eine eineindeutige Abbildung der ganzen (z, φ)-Ebene auf die ganze (ξ, η)-Ebene vermittelt. Die Kurve $\eta(z, \varphi) = 0$, welche sich auf der Fläche S mehr oder weniger spiralig beiderseitig ins Unendliche erstreckt, schneidet S_z in einem Punkte, dessen Flächenkoordinaten mit $\big(z, \varphi_0(z)\big)$ bezeichnet werden sollen. Endlich wird noch $\zeta = \xi + i\eta$ und $e^\zeta = w = u + iv = \varrho e^{i\Theta}$ gesetzt. $u = u(z, \varphi)$ und $v = v(z, \varphi)$ bilden dann die Fläche S eineindeutig und konform auf das Gebiet $0 < |w| < \infty$ ab.

Es sei $\alpha = \alpha(z, \varphi)$ der Winkel zwischen der positiven x-Richtung und der Richtung der Tangente an die Kurve S_z im Punkte (z, φ). Dieser Winkel ist nur bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt und soll deshalb folgendermaßen normiert werden: Für $\alpha\big(0, \varphi_0(0)\big)$ wird zunächst diejenige Bestimmung ausgesucht, für welche $0 \leqq \alpha\big(0, \varphi_0(0)\big) < 2\pi$ ist. Weiterhin wird α längs der Kurve $\eta = 0$ stetig nach beiden Seiten ins Unendliche fortgesetzt. Für festes z und für Winkel φ aus dem Intervall $\varphi_0(z) \leqq \varphi < \varphi_0(z) + 2\pi$ schließlich wird $\alpha(z, \varphi)$ aus $\alpha\big(z, \varphi_0(z)\big)$ durch stetige Fortsetzung gewonnen. In dieser Weise ist der Winkel α im Streifen $0 \leqq \eta < 2\pi$, d.h. auf der ganzen Fläche S, eindeutig bestimmt. Natürlich gilt $\lim\limits_{\varphi \to \varphi_0(z) + 2\pi} \alpha(z, \varphi) = \alpha\big(z, \varphi_0(z)\big) + 2\pi$.

Wegen des sternförmigen Charakters von S_z ergeben sich im Intervall $\varphi_0(z) \leqq \varphi < \varphi_0(z) + 2\pi$ die Ungleichungen

$$(3) \qquad \varphi \leqq \alpha(z, \varphi) + 2\pi k \leqq \varphi + \pi.$$

k ist dabei diejenige ganze Zahl, für welche $\varphi_0(z) \leqq \alpha\big(z, \varphi_0(z)\big) + 2k\pi \leqq \varphi_0(z) + \pi$ gilt. Aus (3) folgt

$$(4) \qquad \varphi_2 - \varphi_1 - \pi \leqq \alpha(z, \varphi_2) - \alpha(z, \varphi_1) \leqq \varphi_2 - \varphi_1 + \pi$$

für $\varphi_0(z) \leqq \varphi_1$, $\varphi_2 < \varphi_0(z) + 2\pi$. α kann natürlich auch als Funktion von u und v oder von ϱ und Θ aufgefaßt werden, und wir betrachten nun die Funktion $\beta(\varrho, \Theta) = \alpha(z, \varphi) - \Theta$, welche in $0 < |w| < \infty$ stetig ist. Wegen (4) und

wegen der Stetigkeit von $\beta(\varrho, \Theta)$ gilt dann

$$|\beta(\varrho, \Theta_2) - \beta(\varrho, \Theta_1)| \leqq 3\pi. \tag{5}$$

Die Funktion α ist eine harmonische Funktion auf der Minimalfläche, d.h. eine harmonische Funktion irgendeines Paares isothermer Parameter (siehe M. SHIFFMAN [2], S. 78).

Das sieht man am besten so ein: Man stelle die Fläche — unter Benutzung neuer Koordinaten — lokal in der Form $z = f(x, y)$ dar und nehme an, daß $x = \text{const}$ die Schar paralleler Ebenen bedeutet. Der Winkel α ist dann irgendein Zweig von arc tg z_y. Man überzeugt sich durch Ausrechnen, daß $(1 + z_y^2)\alpha_{xx} - 2z_x z_y \alpha_{xy} + (1 + z_x^2)\alpha_{yy} = 0$ gilt, was bekanntlich die Harmonizität von α ausdrückt: Wenn man nämlich z.B mit den isothermen Parametern

$$\xi = x, \qquad \eta = \int^{(x,y)} (1 + z_x^2 + z_y^2)^{-\frac{1}{2}} [z_x z_y \, dx + (1 + z_y^2)\, dy]$$

arbeitet, ergibt sich $(1 + z_y^2)(\alpha_{\xi\xi} + \alpha_{\eta\eta}) = (1 + z_y^2)\alpha_{xx} - 2z_x z_y \alpha_{xy} + (1 + z_x^2)\alpha_{yy}$.

Somit ist natürlich auch die in $0 < |w| < \infty$ definierte und eindeutige Funktion β harmonisch in den Variablen u und v und muß daher die Form

$$\beta(u, v) = \Re[f(w) + \lambda \log w] \tag{6}$$

besitzen. λ ist eine reelle Zahl, und $f(w)$ bedeutet eine in $0 < |w| < \infty$ konvergente Laurent-Reihe.

Wir haben nun zu zeigen, daß $f(w)$ eine Konstante sein muß. Zunächst sei $\lambda \neq 0$ angenommen. Dann wird die Funktion

$$g(w) = w\, e^{\frac{1}{\lambda} f(w)} \qquad \text{mit} \qquad |g(w)| = e^{\frac{1}{\lambda}\beta(u, v)} \tag{7}$$

eingeführt. Aus (5) folgen die für $0 < |w_1| = |w_2| < \infty$ gültigen Ungleichungen

$$\frac{1}{M} \leqq \left| \frac{g(w_2)}{g(w_1)} \right| \leqq M, \qquad M = e^{\frac{3\pi}{|\lambda|}}. \tag{8}$$

Falls die Laurent-Reihe $f(w)$ negative Potenzen von w aufwiese, so hätte $g(w)$ bei $w = 0$ eine wesentliche Singularität. Es gäbe dann zu jeder beliebigen positiven Zahl K in der Umgebung von $w = 0$ drei Punkte w_j $(j = 1, 2, 3)$ mit $0 < |w_1| < |w_2| < |w_3| < \infty$, in denen

$$|g(w_1)| \leqq \frac{1}{K}, \qquad |g(w_2)| \geqq K, \qquad |g(w_3)| \leqq \frac{1}{K} \tag{9}$$

ist. Daraus und aus (8) folgte

$$\begin{cases} |g(w)| \leqq \dfrac{M}{K} & \text{für } |w| = |w_1| \text{ und für } |w| = |w_3|, \\ |g(w)| \geqq \dfrac{K}{M} & \text{für } |w| = |w_2|. \end{cases} \tag{10}$$

Indem dann z.B. $K = 2M$ gesetzt wird, entstände ein Widerspruch zum Maximumprinzip.

Eine analoge Betrachtung kann für den Punkt $w = \infty$ angestellt werden. Der Fall $\lambda = 0$ erledigt sich genauso.

Aus dem Vorangehenden ergibt sich, daß $f(w)$ eine Konstante ist und α daher die Form

$$\alpha(z, \varphi) = \Theta + \Re f(w) + \lambda \log|w| = \varkappa + \lambda z + \eta(z, \varphi) \tag{11}$$

besitzt. Hierbei ist $\Re f(w) = \varkappa$ gesetzt und die Gleichheit $\Theta = \eta$ berücksichtigt.

Weil nun $\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = \frac{1}{W}(r^2 + r_\varphi^2) > 0$ gilt, muß α monoton mit φ zunehmen, was bedeutet, daß die Kurven S_z konvex sind.

Damit ist der Beweis des Hilfssatzes und — unter Berufung auf das in [1] bewiesene Resultat — auch des Satzes beendet.

Literatur

[1] Nitsche, J. C. C.: A uniqueness theorem of Bernstein's type for minimal surfaces in cylindrical coordinates. J. Rational Mech. Anal. **6**, 859—864 (1957).

[2] Shiffman, M.: On surfaces of stationary area bounded by two circles or convex curves, in parallel planes. Ann. of Math. **63**, 77—90 (1956).

Dept. of Math., Inst. of Technology, Univ. of Minnesota, Minneapolis, Minn. U.S.A.

(Eingegangen am 11. April 1960)

Kneser, H.
Math. Zeitschr. 74, 293–296 (1960)

Majoranten bei einem Existenzsatz über partielle Differentialgleichungen

Herrn Erich Kamke zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von
Hellmuth Kneser

E. Picard[1]) bewies als erster, daß die Differentialgleichung

$$z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y), \tag{1}$$

gebildet mit einer stetigen Funktion f, die betreffs der letzten drei Argumente die Lipschitzsche Bedingung beschränkter Differenzenquotienten erfüllt, immer eine Lösung hat, die in einem genau angegebenen Bereich erklärt ist und angemessene Anfangsbedingungen erfüllt. Der Bereich ist ein Rechteck $a \leqq x \leqq A$, $b \leqq y \leqq B$; die Anfangsbedingungen bestehen in vorgeschriebenen Werten von z auf den Rechtecksseiten $x = a$ und $y = b$.

Ein anderer Typ von Bereich und Anfangsbedingungen ist der folgende. Das Rechteck wird von der linken oberen zur rechten unteren Ecke durchzogen von einer Kurve C: $y = Y(x)$ mit $Y' < 0$; auf ihr werden die Werte von z und einer der Ableitungen z_x und z_y — und damit auch die der anderen — vorgeschrieben. Behauptet wird die Existenz einer Lösung von (1) in einem der durch C bestimmten Teile des Rechtecks, etwa in dem rechten oberen. In diesem Falle läßt sich die Angelegenheit recht kurz abmachen[2]), wenn man sich auf eine hinreichend enge Umgebung eines beliebigen Punktes von C beschränkt; auch braucht man dann die Lipschitz-Bedingung nur in einer Umgebung der Anfangswerte von x, y, z, z_x und z_y.

Hier soll von dem vollen, nicht auf einen kleinen Bereich beschränkten Satz die Rede sein. Picard[1]) folgt dem klassischen Majorantenschema und zieht am Ende einen eleganten funktionentheoretischen Schluß. In E. Kamkes Standardwerk über Differentialgleichungen *reeller* Funktionen[3]) hätte dieser als ein Fremdkörper erscheinen können; vielleicht aus diesem Grunde werden an seiner Stelle sorgfältige Einzelabschätzungen durchgeführt. Man kann aber auch im Reellen dem Majorantenschema treu bleiben und gewinnt dadurch die Vorteile, die sich einzustellen pflegen, wenn ein Einzelproblem einer allgemeinen Methode untergeordnet wird.

Zunächst ist es bequem, eine gehörig differenzierbare Funktion w zu bestimmen, die die Anfangsbedingungen erfüllt, und statt z die Funktion

[1]) Note I in G. Darboux: Leçons sur la Théorie générale des Surfaces, Bd. 4, S. 353 bis 367. 1896.

[2]) Siehe z. B. R. Courant u. D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik, 1. Aufl., Bd. 2, S. 319–321. 1937.

[3]) Differentialgleichungen reeller Funktionen, 2. Aufl., S. 401–410. 1945.

$z' = z - w$ in (1) einzuführen. Für sie ergibt sich eine Differentialgleichung von derselben Form wie (1) mit einer anderen Funktion f' auf der rechten Seite; dabei hat f' dieselben Eigenschaften, die von f vorausgesetzt wurden. Es genügt deshalb, die Differentialgleichung (1) mit den Anfangswerten Null zu behandeln. Zusammen mit diesen Anfangsbedingungen ist (1) gleichwertig mit der Gleichung

$$z(x,y) = \iint_G f\big(\xi,\eta,z(\xi,\eta),p(\xi,\eta),q(\xi,\eta)\big)\,d\xi\,d\eta, \tag{2}$$

in der die üblichen Zeichen p und q für z_x und z_y benutzt sind und G den Bereich

$$G\colon\quad a \leqq \xi \leqq x, \qquad Y(x) \leqq \xi \leqq y$$

bezeichnet. Im Falle der Anfangsbedingungen der ersten Art, auf den Rechtecksseiten $x = a$ und $y = b$, ist G durch das Rechteck

$$R\colon\quad a \leqq \xi \leqq x, \qquad b \leqq \eta \leqq y$$

zu ersetzen.

Nach PICARD setzt man nun

$$z_0 = 0, \tag{3}$$

$$z_{n+1} = \iint_G f\big(\xi,\eta,z_n(\xi,\eta),p_n(\xi,\eta),q_n(\xi,\eta)\big)\,d\xi\,d\eta. \tag{4}$$

Differenzieren ergibt

$$p_0 = q_0 = 0, \tag{5}$$

$$p_{n+1}(x,y) = \int_{Y(x)}^{y} f\big(x,\eta,z_n(x,\eta),p_n(x,\eta),q_n(x,\eta)\big)\,d\eta, \tag{6}$$

$$q_{n+1}(x,y) = \int_{X(y)}^{x} f\big(\xi,y,z_n(\xi,y),p_n(\xi,y),q_n(\xi,y)\big)\,d\xi \tag{7}$$

(hier ist X die Umkehrfunktion von Y), womit zugleich durch vollständige Induktion die Benutzung der Ableitungen p_n und q_n von z_n in (4), (6) und (7) gerechtfertigt ist. Die in (4), (6) und (7) auftretenden linearen und monotonen Integraloperatoren seien mit I_G, K_G und L_G bezeichnet; sollen sie sich auf das Rechteck R statt auf G beziehen, so bleibt der Anhänger G weg.

Jetzt kommt es nur noch darauf an, die gleichmäßige Konvergenz der Folgen (z_n), (p_n) und (q_n) gegen Grenzfunktionen z, p und q zu beweisen; gemäß (4), (6) und (7) sind dann p und q die Ableitungen von z, und es gilt (2). Ist m eine obere Schranke für $f(\xi,\eta,0,0,0)$ und k die Konstante in der Lipschitz-Bedingung für f, so entnimmt man aus (3) bis (7) die Abschätzungen

$$|z_1| \leqq m(A-a)(B-b) = M_0, \tag{8}$$

$$|p_1| \leqq m(B-b) = M_1, \qquad |q_1| \leqq m(A-a) = M_2, \tag{9}$$

$$|z_{n+1} - z_n| \leqq k I_G(|z_n - z_{n-1}| + |p_n - p_{n-1}| + |q_n - q_{n-1}|), \tag{10}$$

$$|p_{n+1} - p_n| \leqq k K_G(|z_n - z_{n-1}| + |p_n - p_{n-1}| + |q_n - q_{n-1}|), \tag{11}$$

$$|q_{n+1} - q_n| \leqq k L_G(|z_n - z_{n-1}| + |p_n - p_{n-1}| + |q_n - q_{n-1}|), \tag{12}$$

die drei letzten für $n>0$. Schreibt man

$$u_n=|z_n-z_{n-1}|+|p_n-p_{n-1}|+|q_n-q_{n-1}|, \quad u_1=|z_1|+|p_1|+|q_1|,$$
$$M=M_0+M_1+M_2,$$
$$H_G=I_G+K_G+L_G, \quad H=I+K+L,$$

so lassen sich die Ungleichungen (8) bis (12) zusammenfassen zu

(13) $$0\leqq u_1\leqq M,$$

(14) $$0\leqq u_{n+1}\leqq k\,H_G(u_n)\leqq k\,H(u_n)\ ^{3}).$$

Gemäß dem Majorantenschema wird jetzt durch

(15) $$v_1=M, \quad v_{n+1}=k\,H(v_n) \qquad (n>0)$$

eine Folge von Funktionen (übrigens Polynomen) v_n erklärt, und aus (13) und (14) ergibt vollständige Induktion sofort

$$0\leqq u_n\leqq v_n.$$

Da $v_n(x, y)$ eine nicht abnehmende Funktion von x und y ist, hat man in der Reihe $v_1(A, B)+v_2(A, B)+\cdots$, wenn sie konvergiert, eine feste Majorante der Reihe $u_1+u_2+\cdots$ und damit die gleichmäßige Konvergenz der Folgen (z_n), (p_n) und (q_n). Um die Konvergenz von $v_1+v_2+\cdots$ zu beweisen, dient eine für $x\geqq a$, $y\geqq b$ erklärte Funktion $V(x, y)$ mit der Eigenschaft

(16) $$V\geqq 1+k\,H(V).$$

Will man (16) mit dem Gleichheitszeichen befriedigen, so erhält man eine Besselsche Funktion, die auch bei PICARD[1]) versteckt vorkommt. Für die Ungleichung genügt der Ansatz

$$V(x, y)=e^{\beta(x-a+y-b)},$$

wenn man β so bestimmt, daß

(17) $$\beta\geqq k, \quad \beta^2\geqq 2k\beta+k$$

ist, z. B. wenn man

$$\beta=k+\sqrt{k(k+1)}$$

setzt. Mit den Abkürzungen

$$s=e^{\beta(x-a)}-1, \quad t=e^{\beta(y-b)}-1$$

ergibt sich nämlich

$$I(V)=\beta^{-2}st,$$
$$K(V)=\beta^{-1}s(t+1),$$
$$L(V)=\beta^{-1}(s+1)t,$$
$$H(V)=\beta^{-2}st+\beta^{-1}(2st+s+t);$$

[3]) Wenn eine Funktion zunächst nur auf C und oberhalb C erklärt ist, dann aber im ganzen Rechteck benutzt wird, so soll sie unterhalb C gleich Null gesetzt werden.

und wegen $V=(s+1)(t+1)$ erhält man

$$V-1-kH(V)=(1-2k\beta^{-1}-k\beta^{-2})st+(1-k\beta^{-1})(s+t),$$

was wegen (17) nicht negativ ist. Damit ist (16) nachgewiesen. Nimmt man nun

$$v_1+\cdots+v_n\leqq MV \tag{18}$$

an, was für $n=1$ wegen (15) und $V\geqq 1$ richtig ist, so folgt

$$v_1+\cdots+v_{n+1}\leqq M+kH(v_1+\cdots+v_n)\leqq M+MkH(V)\leqq MV$$

[das letzte wegen (16)]. Damit ist (18) für alle $n\geqq 1$ bewiesen, und es folgt die Konvergenz von $v_1(A,B)+v_2(A,B)+\cdots$, die allein noch benötigt wurde.

Mit dem hier benützten Werkzeug ist auch der Eindeutigkeitssatz leicht zu beweisen. Sind z und z' zwei Lösungen derselben Gleichung (1) zu denselben Anfangsbedingungen, p, q, p', q' ihre Ableitungen, und setzt man

$$u=|z'-z|+|p'-p|+|q'-q|,$$

so wird, ähnlich wie vorher,

$$0\leqq u\leqq kH(u); \tag{19}$$

dabei ist $u=0$ auf der Kurve C. Mit $\varepsilon>0$ bildet man $w=\varepsilon V-u$. Wenn es Punkte oberhalb C gibt, in denen $w\leqq 0$ ist, so sei unter diesen Punkten (x_0, y_0) einer mit kleinster Abszisse. Im Integrationsbereich des auf (x_0, y_0) bezogenen Operators H ist dann $w\geqq 0$, auf C sogar $w>0$; daher wird

$$H(w)>0.$$

Wegen (16) und (19) ist andrerseits

$$0\geqq w(x_0,y_0)=\varepsilon V(x_0,y_0)-u(x_0,y_0)>k\varepsilon H(V)-kH(u)=kH(w).$$

Dieser Widerspruch widerlegt die Annahme, es gäbe Punkte mit $w\leqq 0$. Es ist also überall $u<\varepsilon V$. Da ε beliebig klein sein darf, ist überall $u=0$ und daher $z'=z$. Damit ist der Eindeutigkeitssatz bewiesen.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 22. April 1960)

WIELANDT, H.
Math. Zeitschr. 74, 297/298 (1960)

Über den Transitivitätsgrad von Permutationsgruppen

Herrn ERICH KAMKE zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von
Helmut Wielandt

Eine der ältesten noch unbewiesenen Vermutungen der Gruppentheorie besagt, daß der Transitivitätsgrad t einer Permutationsgruppe vom Grade n, die weder alternierend noch symmetrisch ist, eine geeignete von n unabhängige Schranke t_0 ($\geqq 5$) nicht überschreiten kann. Abgesehen von einem nicht sehr umfangreichen Erfahrungsmaterial [2] stützt sich diese Vermutung im wesentlichen auf Abschätzungen der Gestalt $t<f(n)$, wobei $f(n)$ eine schwach gegen Unendlich strebende Funktion bedeutet; die beste bisher erreichte Größenordnung ist $t<3 \log n$ [5]; Aussagen zahlentheoretischer Art finden sich in [3]. Im folgenden wird gezeigt:

Satz 1. *$\mathfrak{G}$ sei eine weder alternierende noch symmetrische Permutationsgruppe. Die äußere Automorphismengruppe jeder einfachen Untergruppe von $\mathfrak{G}$ sei auflösbar. Dann ist $\mathfrak{G}$ höchstens siebenfach transitiv.*

Dabei ist unter der äußeren Automorphismengruppe die Faktorgruppe der vollen Automorphismengruppe nach der Gruppe der inneren Automorphismen zu verstehen. Sollte sich die bekannte Vermutung [4] bestätigen, daß die äußere Automorphismengruppe *jeder* endlichen einfachen Gruppe auflösbar ist, so würde Satz 1 die eingangs erwähnte Vermutung als richtig erweisen (mit $t_0=7$).

Dem Beweis von Satz 1 schicken wir einen Hilfssatz (2) voraus; dabei bezeichnen wir die von $\mathfrak{G}$ permutierten Objekte mit $1, 2, \ldots, n$.

(2) *$\mathfrak{G}$ sei eine siebenfach transitive, weder alternierende noch symmetrische Permutationsgruppe des Grades n. $\mathfrak{H}$ sei die größte Untergruppe von $\mathfrak{G}$, welche jedes der Objekte $1, 2, 3, 4, 5$ fest läßt. Dann enthält $\mathfrak{H}$ einen auf den restlichen $n-5$ Objekten transitiven und regulären, elementar abelschen, aber nicht zyklischen Normalteiler $\mathfrak{M}$.*

Beweis. Wir bezeichnen die Gruppe derjenigen Permutationen aus $\mathfrak{G}$, welche $\Gamma=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ als Ganzes in sich überführen, mit $\mathfrak{L}$. Dann ist $\mathfrak{H}$ eine normale Untergruppe von $\mathfrak{L}$, und $\mathfrak{L}/\mathfrak{H}$ ist zur symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}^5$ isomorph. Wir wählen einen in $\mathfrak{H}$ enthaltenen minimalen Normalteiler $\mathfrak{M}+I$. Dann ist $\mathfrak{M}$ auch ein minimaler Normalteiler des Konstituenten von $\mathfrak{L}$ auf $\Delta=\{6, 7, \ldots, n\}$, den wir mit $\mathfrak{L}^\Delta$ bezeichnen. Als Obergruppe der auf Δ zweifach transitiven Gruppe $\mathfrak{H}$ ist $\mathfrak{L}^\Delta$ auf Δ zweifach transitiv. Wir können auf $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{L}^\Delta$ den folgenden Satz von BURNSIDE anwenden [1, § 154]:

Jeder minimale Normalteiler einer zweifach transitiven Permutationsgruppe ist entweder primitiv und einfach, oder er ist imprimitiv, regulär, elementar abelsch, aber nicht zyklisch.

Hiernach genügt es zum Beweis von (2), zu zeigen, daß unter den Voraussetzungen von (2) der erste im Satz von BURNSIDE erwähnte Fall für $\mathfrak{M}$ nicht eintreten kann. Nehmen wir an, $\mathfrak{M}$ sei primitiv und einfach. Dann kommen wir folgendermaßen zu einem Widerspruch:

(a) *Jedes Element von* $\mathfrak{L}$, *das auf* $\mathfrak{M}$ *einen inneren Automorphismus induziert, liegt in* $\mathfrak{M}$. Es genügt, dies für diejenigen Elemente V von $\mathfrak{L}$ nachzuweisen, die mit jedem Element von $\mathfrak{M}$ vertauschbar sind. Jedenfalls ist der Konstituent $V^{\Delta} \neq I$. Denn sonst würden die Konjugierten von V in $\mathfrak{L}$ die alternierende oder symmetrische Gruppe auf Γ erzeugen, also enthielte $\mathfrak{G}$ einen Zyklus des Grades 3 und damit, als dreifach transitive Gruppe, die ganze Alternierende $\mathfrak{A}^n$. Da der von I verschiedene Konstituent V^{Δ} mit der auf Δ primitiven Gruppe $\mathfrak{M}$ elementweise vertauschbar ist, ist V^{Δ} auf Δ transitiv; das gleiche gilt für jede von I verschiedene Potenz von V^{Δ}. Also ist V^{Δ} ein Zyklus von Primzahlgrad p. Da die Elemente von $\mathfrak{M}$ mit V^{Δ} vertauschbar sind, sind sie Potenzen von V^{Δ}, also ist $V^{\Delta} \in \mathfrak{M}$. Hieraus folgt $V^{\Gamma} \in \mathfrak{L}$, daher ist, wie schon gezeigt, $V^{\Gamma} = I$; demnach $V \in \mathfrak{M}$.

(b) $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ *ist auflösbar.* Ordnet man jedem Element von $\mathfrak{L}$ den Automorphismus zu, den es auf $\mathfrak{M}$ induziert, so ergibt diese Abbildung nach (a) einen Isomorphismus von $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ in die äußere Automorphismengruppe von $\mathfrak{M}$, und diese ist nach Voraussetzung auflösbar.

(c) $\mathfrak{L}/\mathfrak{H}$ ist eine Faktorgruppe von $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ und daher nach (b) auflösbar. Andererseits ist $\mathfrak{L}/\mathfrak{H}$ isomorph zu $\mathfrak{S}^5$, also nicht auflösbar. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir beweisen nun Satz 1 indirekt. Sei $\mathfrak{G}$ achtfach transitiv. Dann enthält die in (2) erklärte Gruppe $\mathfrak{H}$ einen regulären Normalteiler $\mathfrak{M}$ des Grades $m = n - 5$. Wir bezeichnen die größte Untergruppe von $\mathfrak{G}$, welche das Objekt n fest läßt, mit $\mathfrak{G}^*$. Nach dem Hilfssatz, auf $\mathfrak{G}^*$ statt $\mathfrak{G}$ angewandt, enthält die die Objekte 1, 2, 3, 4, 5 fest lassende Untergruppe $\mathfrak{H}^*$ von $\mathfrak{G}^*$ einen regulären, elementar abelschen, aber nicht zyklischen Normalteiler $\mathfrak{M}^*$ vom Grade $m - 1$. Wir bilden die Gruppe $\mathfrak{M}\mathfrak{M}^*$. Sie ist zweifach transitiv, vom Grade m und von der Ordnung $m(m-1)$. In einer solchen Gruppe ist jede abelsche Untergruppe, die ein Objekt fest läßt, zyklisch [*1*, p. 335]. Also müßte $\mathfrak{M}^*$ zyklisch sein, was nicht zutrifft.

Literatur

[*1*] BURNSIDE, W.: Theory of groups of finite order, 2nd ed. 1911, 1955.
[*2*] PARKER, E.T., and P. NIKOLAI: A search for analogues of the Mathieu groups. Math. Tables and Aids f. Comp. **12**, 38–43 (1958).
[*3*] PARKER, E. T.: On quadruply transitive groups. Pacific. J. Math. **9**, 829–836 (1959).
[*4*] SCHREIER, O., u. B. L. VAN DER WAERDEN: Die Automorphismen der projektiven Gruppen. Abh. math. Sem. Hamburg **6**, 303—322 (1928).
[*5*] WIELANDT, H.: Abschätzungen für den Grad einer Permutationsgruppe von vorgeschriebenem Transitivitätsgrad. Schriften math. Sem. u. Inst. angew. Math. Berlin **2**, 151–174 (1934).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 26. Juni 1960)

Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg

Einführung in die symbolische Logik

mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen

Von Rudolf Carnap,
Professor der Philosophie, University of California, Los Angeles

Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage

Mit 5 Textabbildungen. XII, 241 Seiten Gr.-8°. 1960.
Ganzleinen DM 28,—

INHALTSÜBERSICHT

Erster Teil: System der symbolischen Logik

Die einfache Sprache A: Die Aufgabe der symbolischen Logik. Individuenkonstanten und Prädikate. Satzverknüpfungen. Die Wahrheitstafeln. L-Begriffe. L-Implikation und L-Äquivalenz. Satzvariable. Tautologische Satzformeln. All- und Existenzsätze. Prädikatvariable. Bewertungen. Einsetzungen. Lehrsätze über Operatoren. Vertauschbarkeit und Definitionen. L-wahre Formeln mit Operatoren. Prädikate höherer Stufen. Identität; Kardinalzahlen. Funktoren. Isomorphie · Die Sprache B: Semantische und syntaktische Systeme. Formregeln für Sprache B. Umformungsregeln für Sprache B. Beweise und Ableitungen in Sprache B. Lehrsätze über Beweisbarkeit und Ableitbarkeit in Sprache B. Das semantische System für Sprache B. Beziehungen zwischen syntaktischen und semantischen Systemen · Die erweiterte Sprache C: Die Sprache C. Prädikatverknüpfungen. Identität; Extensionalität. Relationsprodukt; Relationspotenzen. Verschiedene Arten von Relationen. Weitere logische Prädikate, Funktoren und Verknüpfungen. Der λ-Operator. Äquivalenzklassen, Strukturen, Kardinalzahlen. Kennzeichnungen von Individuen. Erblichkeit und Relationsketten. Endliches und Unendliches. Stetigkeit.

Zweiter Teil: Anwendungen der symbolischen Logik

Formen und Methoden des Sprachaufbaues: Dingsprachen. Koordinatensprachen. Quantitative Begriffe. Die axiomatische Methode · Axiomensysteme (ASe) der Mengenlehre und Arithmetik: AS der Mengenlehre. Peanos AS der natürlichen Zahlen. AS der reellen Zahlen · ASe der Geometrie: AS der Topologie (Umgebungsaxiome). AS der projektiven, affinen und metrischen Geometrie · ASe der Physik: ASe der Raum-Zeit-Topologie (1. Das *K-Z*-System. 2. Das *Wlin*-System. 3. Das *W*-System). Determination und Kausalität · ASe der Biologie: AS der Dinge und ihrer Teile. AS einiger biologischer Begriffe. AS der Verwandtschaftsbegriffe · Anhang: Übungsaufgaben zur Anwendung der symbolischen Logik · Literaturverzeichnis. Literaturhinweise · Namen- und Sachverzeichnis · Zeichen der symbolischen Sprache und der Metasprache.

SPRINGER-VERLAG · WIEN

Vor kurzem erschien :

Norm Ideals of Completely Continuous Operators

By Professor Dr. ROBERT SCHATTEN,
Department of Mathematics, University of Kansas, Lawrence/Kansas

(Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge. Heft 27. Reihe: Reelle Funktionen. Besorgt von P. R. HALMOS)

VIII, 81 Seiten Gr.-8°. 1960. In englischer Sprache. DM 23,60

CONTENTS

Preliminaries and notation · The class of operators of the form $\Sigma_j \lambda_j \varphi_j \otimes \overline{\psi}_j$: The operator $\Sigma_j \lambda_j \varphi_j \otimes \overline{\psi}_j$. The spectrum of the operator $\Sigma_j \lambda_j \varphi_j \otimes \overline{\varphi}_j$. Completely continuous operators. The spectral representation of a completely continuous Hermitean operator. Some equalities and inequalities for the proper values of completely continuous Hermitean operators. Some ideals of operators. The ideals of completely continuous operators. Some uniformly closed left ideals of completely continuous operators · The Schmidt-class: (σc) as a Hilbert space of completely continuous operators. The Schmidt-class of operators on L^2 · The trace-class: (τc) as a Banach space of completely continuous operators. A maximum problem in (τc) · The successive conjugate spaces of the space $\mathfrak{C}$ of all completely continuous operators: A characterization of $\mathfrak{C}^*$ and $\mathfrak{C}^{**}$. $\mathfrak{C}$ is not a conjugate space. Some linear functionals on the space of all operators · Norm ideals: Crossnorms and norm ideals. A maximum problem for $\mathfrak{H}_n$. Symmetric gauge functions on $\mathfrak{L}_n$. The unitarily invariant crossnorms on $\mathfrak{R}_n$. The symmetric gauge functions on $\mathfrak{L}$ and the unitarily invariant crossnorms on $\mathfrak{R}$. A special class of symmetric gauge functions. Norm ideals and the minimal norm ideals. The uniqueness of norm for the minimal norm ideals. An open problem · Bibliography.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz A G., Würzburg
Printed in Germany